

# LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-26



Babak Penyisihan  
Tingkat SMA  
Minggu, 8 November 2015

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS GADJAH MADA  
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR P .O. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281  
lmnas@ugm.ac.id — <http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>

## PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA UGM KE-26

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Peserta wajib membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri pasfoto berukuran  $3 \times 4$ .
3. Peserta wajib membawa Kartu Tanda Peserta LMNAS 26 yang dapat diunduh dari web.
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk dan mengerjakan soal dengan waktu yang tersisa (tidak ada tambahan waktu).
6. Tulislah semua identitas diri Anda pada lembar jawaban pilihan ganda dan lembar jawaban isian singkat.
7. Sebelum mengerjakan soal, periksalah kelengkapan naskah soal.
8. Bacalah dan kerjakan soal dengan cermat. Untuk soal pilihan ganda, pilih salah satu jawaban yang Anda anggap benar dengan menghitamkan bulatan huruf jawaban tersebut. Untuk soal isian singkat, cukup tuliskan jawaban akhir pada kotak yang tersedia.
9. Untuk soal pilihan ganda, jawaban benar bernilai +4, salah bernilai -1, kosong bernilai 0
10. Untuk soal isian singkat, jawaban benar bernilai +8, sedangkan salah atau kosong bernilai 0.
11. Apabila terdapat nilai yang sama maka yang diperhatikan pertama kali adalah jumlah benar pada isian singkat, kemudian jumlah benar pada pilihan ganda.
12. Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, HP, tabel matematika atau alat bantu hitung lainnya selama pengerjaan soal.
13. Selama waktu pengerjaan soal, HP, tablet atau alat elektronik lainnya harus dinonaktifkan.
14. Dilarang pinjam-meminjam alat tulis, bekerja sama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain selama lomba berlangsung.
15. Peserta tidak diperkenankan meninggalkan ruang lomba selama pengerjaan soal tanpa seizin pengawas ruang.
16. Jika peserta melakukan pelanggaran, maka pengawas ruang akan memberi peringatan. Jika pelanggaran dilakukan lebih dari 2 (dua) kali, maka peserta akan didiskualifikasi.
17. Untuk soal yang tidak ada ralat selama lomba berlangsung, maka soal harus dikerjakan apa adanya.
18. Waktu pengerjaan soal adalah 120 menit.
19. Setelah selesai lomba, tinggalkan pekerjaan anda di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan bersih dan tidak terlipat atau robek. Naskah soal boleh dibawa pulang.
20. Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 26
21. Pengumuman hasil penyisihan dapat dilihat di web LMNAS 26 (<http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>) maksimal tanggal 15 November 2015. Keputusan dewan juri tidak dapat diganggu gugat.
22. Untuk peraturan lainnya yang belum jelas dapat ditanyakan kepada panitia pengawas.

# 1 Pilihan Ganda

1. Diketahui

$$\sqrt{\frac{\sec^2 2x - 6 \tan^2 x - (\sec^2 2x)(\tan^2 x) + 6 \tan x + 6}{1 - \tan^2 x}} - \sqrt{\frac{\sec^2 2x + 3 \tan^2 x - (\sec^2 2x)(\tan^2 x) + 6 \tan x - 3}{1 - \tan^2 x}} = 1$$

Jika  $x = \frac{\arctan n}{2}$  untuk suatu bilangan real  $n$ , maka nilai dari  $n^2 + 1$  adalah ...

- A. 8                      B. 9                      C. 10                      D. 11                      E. 12

2. Jumlah semua nilai  $x$  yang memenuhi

$$\sqrt{x + \sqrt{10000000}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

dengan  $a, b, x$  bilangan asli adalah ...

- A.  $(2^6 - 1) \frac{5^8 - 1}{4}$     B.  $(2^5 - 1) \frac{5^8 - 1}{4}$     C.  $(2^6 - 1) \frac{5^7 - 1}{4}$     D.  $(2^5 - 1) \frac{5^7 - 1}{4}$     E.  $(2^7 - 1) \frac{5^7 - 1}{4}$

3. Banyaknya solusi tripel bilangan prima  $(a, b, c)$  yang memenuhi  $ab + ac + bc > abc$  adalah ...

- A. Tidak ada    B. 1                      C. 2                      D. 3                      E. Tak hingga

4. Diberikan suatu sistem persamaan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} x^6 + x^5 + x^4 + 2x^3 + x^2 + x &= 71 \\ x^9 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 &= 191 \\ x^8 + x^7 + x^5 + 2x^4 + x^3 + x &= 95 \\ x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x &= 143 \end{aligned}$$

Nilai dari  $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^{10}$  adalah ...

- A. 222                      B. 227                      C. 232                      D. 237                      E. 242

5. Diketahui bilangan bulat positif  $x, y$  memenuhi persamaan  $KPK(x, y) \cdot FPB(x, y) + x^2 + y^2 = 126$ . Sisa pembagian dari  $x^9 - y^9$  oleh 126 adalah ...

- A. 0                      B. 1                      C. 21                      D. 63                      E. 125

6. Diberikan bilangan real  $a, b$  yang memenuhi  $\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}$  dan  $\cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$ . Nilai  $\sin(a+b)$  yaitu ...

- A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$                       C.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$                       D.  $\frac{\sqrt{3}}{5}$                       E. 1

7. Misalkan  $x$  dan  $y$  adalah 2 bilangan real yang memenuhi  $\frac{\sin x}{\sin y} = 3$  dan  $\frac{\cos x}{\cos y} = \frac{1}{2}$ . Maka nilai dari

$\frac{\sin 2x}{\sin 2y} + \frac{\cos 2x}{\cos 2y}$  adalah ...

- A.  $\frac{49}{58}$                       B.  $\frac{50}{58}$                       C.  $\frac{51}{58}$                       D.  $\frac{52}{58}$                       E.  $\frac{53}{58}$

8. Nilai dari  $\prod_{k=0}^{2015} \cos 2^k x$  adalah ...

- A.  $\frac{\sin 2^{2016} x}{2^{2016} \sin x}$     B.  $\frac{\sin 2^{2015} x}{2^{2015} \sin x}$     C.  $\frac{\sin 2^{2015} x}{2^{2015}}$     D.  $\sin 2^{2016} x$     E.  $\frac{\cos 2^{2016} x}{2^{2016} \sin x}$

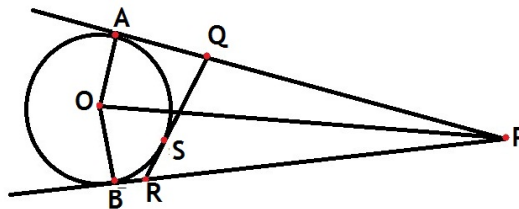
9. Untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots, 2015$ ,  $a_i$  menyatakan ruas-ruas garis pada suatu segi-2015. Pada masing-masing  $a_i$ , terdapat 2015 titik dimana tidak ada satupun titik yang berada pada ujung-ujung ruas garis  $a_i$ . Jika untuk setiap  $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ , didefinisikan  $\binom{n}{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n} = \frac{n!}{x_1!x_2!x_3!\dots x_n!}$ , maka banyaknya segi-2015 yang dapat dibuat sedemikian sehingga titik-titik sudutnya merupakan titik-titik yang berada pada ruas garis  $a_i$  adalah ...

- A.  $2015^{2015} \sum_{k=0}^{1007} \left(\frac{1007}{2015}\right)^k \binom{n}{2015 - 2k k k k}$   
 B.  $2015^{2015} \sum_{k=0}^{1008} \left(\frac{1007}{2015}\right)^k \binom{n}{2015 - 2k k k k}$   
 C.  $2015^{2015} \sum_{k=0}^{1007} \left(\frac{1007}{2015}\right)^k \binom{n}{2015 - 4k 2k 2k}$   
 D.  $2015^{2015} \sum_{k=0}^{1008} \left(\frac{1007}{2015}\right)^k \binom{n}{2015 - 4k 2k 2k}$   
 E.  $2015^{2015} \sum_{k=0}^{2015} \left(\frac{1007}{2015}\right)^k \binom{n}{2015 - k \frac{1}{2} k \frac{1}{2} k}$

10. Banyaknya bilangan asli yang kurang dari 10000 dimana jumlah digit-digitnya sama dengan 20 adalah ...  
 A. 629                      B. 631                      C. 633                      D. 635                      E. 637
11. Smart City mempunyai 5 buah sekolah dimana pada masing-masing sekolah tersebut terdapat tepat 2 orang guru. Menjelang Ujian Nasional, pemerintah kota Smart City mulai mengatur pasangan guru-guru yang akan mengawas di 5 sekolah tersebut. Jika disyaratkan bahwa masing-masing sekolah harus diawasi oleh 2 guru dimana satu guru berasal dari sekolah yang diawasi, dan satu guru lagi berasal dari sekolah lain, maka banyak cara pemerintah Smart City mengaturnya adalah ...  
 A. 864                      B. 1408                      C. 1472                      D. 1588                      E. 1620
12. Bilangan bulat terbesar yang tidak dapat dinyatakan dalam bentuk  $6a + 9b + 20c$  untuk suatu bilangan bulat non-negatif  $a, b, c$  adalah ...  
 A. 43                      B. 1876                      C. 2015                      D. 5577                      E. 7019
13. Misalkan  $-\frac{5}{12}\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{3}$ . Maka nilai maksimum dari  $\tan(x + \frac{2\pi}{3}) - \tan(x + \frac{\pi}{6}) + \cos(x + \frac{\pi}{6})$  adalah ...  
 A.  $\frac{12}{5}\sqrt{2}$                       B.  $\frac{11}{6}\sqrt{2}$                       C.  $\frac{11}{6}\sqrt{3}$                       D.  $\frac{12}{5}\sqrt{3}$                       E.  $\frac{11}{5}\sqrt{2}$
14. Diketahui luas sisi-sisi dari suatu balok besar yaitu  $221cm^2, 221cm^2, 247cm^2, 247cm^2, 323cm^2$  dan  $323cm^2$ . Sejumlah  $n$  balok kecil berukuran  $(2 \times 3 \times 4)cm^3$  akan dimasukkan kedalam balok besar tersebut. Jika cara meletakkan setiap balok kecil kedalam balok besar tersebut adalah sama, nilai maksimum yang mungkin untuk  $n$  adalah ...  
 A. 99                      B. 128                      C. 135                      D. 144                      E. 174
15. Didefinisikan  $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \dots + |x - 20|$ . Banyaknya bilangan real  $x$  sedemikian sehingga  $f(x) = 100$  adalah ...  
 A. 0                      B. 1                      C. 3                      D. 20                      E. Tak hingga
16. Jika  $x, y, z$  adalah sudut-sudut pada suatu segitiga, maka nilai minimum dari  $(\sin x + \sin y + \sin z)(\csc x + \csc y + \csc z)$  yaitu ...  
 A. 8                      B. 9                      C. 10                      D. 11                      E. 12

17. Nilai minimum yang mungkin dari  $\sin x_1 \cos x_2 + \sin x_2 \cos x_3 + \dots + \sin x_{2014} \cos x_{2015} + \sin x_{2015} \cos x_1$  untuk sembarang bilangan real  $x_1, x_2, \dots, x_{2015}$  adalah ...  
 A. -2016      B. -2015      C. -2014      D. -1008      E.  $-\frac{2015}{2}$
18. Nilai maksimum  $z$  yang memenuhi  $x + y + z = 5$  dan  $xy + xz + yz = 3$  adalah ...  
 A.  $\frac{13}{3}$       B.  $\frac{14}{3}$       C.  $\frac{15}{3}$       D.  $\frac{16}{3}$       E.  $\frac{17}{3}$
19. Diketahui bahwa  $a$  adalah bilangan bulat sedemikian sehingga  $x^2 - x + a$  membagi  $x^{2015} + x + 90$ . Jumlah semua nilai  $a$  yang memenuhi adalah ...  
 A. -2      B. -1      C. 0      D. 1      E. 2
20. Banyaknya pasangan bilangan bulat  $(x, y)$  dengan  $x \geq y$  yang memenuhi  $FPB(x, y) = 5!$  dan  $KPK(x, y) = 50!$  adalah ...  
 A.  $2^{14}$       B.  $2^{15}$       C.  $2^{16}$       D.  $2^{17}$       E.  $2^{18}$
21. Didefinisikan  $S_n$  adalah jumlahan  $n$  bilangan asli pertama. Diketahui bahwa  $S_1, S_2, \dots, S_{2015}$  adalah akar-akar polinomial  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2015}x^{2015}$ . Nilai dari  $\frac{a_1}{a_0}$  adalah ...  
 A.  $\frac{2015}{1008}$       B.  $-\frac{2015}{1008}$       C.  $\frac{2015}{2016}$       D.  $-\frac{2015}{2016}$       E.  $\frac{2016}{2015}$
22. Banyaknya bilangan asli  $n$  sehingga terdapat bilangan bulat  $k$  dan  $z$  dengan  $z \geq 2$  yang memenuhi  $n(n^2 + 1) = k^z$  adalah ...  
 A. 0      B. 1      C. 2      D. 5      E. Tak hingga
23. Diberikan fungsi  $f(x) = x^2 + 16$ . Misalkan bahwa  $x, y$  adalah bilangan real positif yang memenuhi  $f(xy) = f(y + 2x) - f(y - 2x)$ . Nilai minimum yang mungkin untuk  $x + y$  adalah ...  
 A. 2      B.  $2\sqrt{2}$       C. 4      D.  $4\sqrt{2}$       E. 8
24. Banyaknya pasangan bilangan real positif  $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2015})$  dengan  $a_1 < a_2 < \dots < a_{2015}$  dan memenuhi  $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} + \dots + \frac{a_{2014}}{a_{2015}} + \frac{a_{2015}}{a_1} = 2015$  adalah ...  
 A. 0      B. 1      C. 2      D. 3      E. 4
25. Nilai dari
- $$\sum_{k=1008}^{3020} \tan\left(\frac{k\pi}{2014}\right)$$
- adalah ...  
 A.  $-\frac{\pi}{1007}$       B.  $-\frac{\pi}{2014}$       C. 0      D.  $\frac{\pi}{2014}$       E.  $\frac{\pi}{1007}$
26. Didefinisikan  $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$ . Nilai dari  $f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + f\left(\frac{3}{2015}\right) + \dots + f\left(\frac{2014}{2015}\right)$  adalah ...  
 A. 1007      B. 1008      C. 2014      D. 2015      E. 2016
27. Diberikan bilangan bulat  $x, y$ . Nilai  $x + y$  yang memenuhi  $1071x + 1173y = -1836$  dengan  $y$  bilangan asli terkecil adalah ...  
 A. -2      B. -1      C. 0      D. 1      E. 2
28. Didefinisikan  $[x]$  menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan  $x$ , serta  $\lceil x \rceil$  menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan  $x$ . Jika  $x, y, z$  bilangan real yang memenuhi
- $$\begin{aligned} [x] + [y] + z &= 36, 5 \\ [x] + y + [z] &= 36, 1 \\ x + [y] + \lceil z \rceil &= 36, 2 \end{aligned}$$
- Maka nilai dari  $\lceil x + y + z \rceil + [x + y + z]$  adalah ...  
 A. 70      B. 71      C. 72      D. 73      E. 74

29. Jika  $x, y, z$  adalah bilangan prima yang memenuhi  $38x + 209y = 2016z$ , maka nilai  $x + y + z$  adalah ...  
 A. 1015                      B. 1016                      C. 1017                      D. 1018                      E. 1019
30. Diketahui  $P(x)$  adalah polinomial berderajat 15, dimana koefisien  $x^{15}$  nya bernilai 1. Jika  $P(2000) = 2000, P(2001) = 2001, P(2002) = 2002, \dots, P(2014) = 2014$ , nilai dari  $P(2015)$  adalah ...  
 A. 2015                      B. 2016                      C.  $2015 - 15!$                       D.  $2016 - 16!$                       E.  $2015 + 15!$
31. Banyaknya faktor positif dari  $30!$  yang habis dibagi 667 adalah ...  
 A. 0                      B. 128700                      C. 293700                      D. 345000                      E. 583200
32. Diberikan fungsi  $f(x)$  yang memenuhi  $f(1 - x) = f(x + 1)$  untuk setiap bilangan real  $x$ . Jika  $f$  mempunyai tepat 2015 akar berbeda, jumlah dari semua akar-akarreal  $f$  adalah ...  
 A. -2015                      B. 0                      C. 2015                      D. 4030                      E. 6045
33. Diperhatikan gambar berikut



- Diketahui lingkaran tersebut berpusat di  $O$ . Dua buah garis singgung lingkaran menyinggung lingkaran di titik  $A$  dan  $B$ , serta kedua garis tersebut berpotongan di  $P$ . Garis  $QR$  juga menyinggung lingkaran di  $S$ . Jika diameter lingkaran 14, serta panjang  $OP = 25$ , keliling segitiga  $PQR$  adalah ...  
 A. 24                      B. 48                      C. 72                      D. 96                      E. 120
34. Diketahui nilai  $a$  memenuhi sistem persamaan

$$x^2 = y^2$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

Jumlah semua nilai  $a$  sehingga sistem tersebut memiliki tepat 2 solusi adalah ...

- A. -2                      B. -1                      C. 0                      D. 1                      E. 2
35. Sebuah kantong berisi 100 bola dengan tulisan angka 1 sampai 100. Kemudian dilakukan 8 kali pengambilan bola dari dalam kantong tersebut dengan pengembalian. Urutan nomor bola yang terambil kemudian dicatat. Suatu urutan dikatakan bersifat "Willy" jika nomor bola yang terambil lebih kecil atau sama dengan nomor bola yang terambil sebelumnya. Banyaknya urutan yang bersifat "Willy" adalah ...  
 A.  $2^8$   
 B.  $2^{100}$   
 C.  $\binom{100}{8}$   
 D.  $\sum_{k=0}^7 \binom{7}{k} \binom{100}{8-k}$   
 E.  $\sum_{k=0}^8 \binom{8}{k} \binom{100}{91+k}$

36. Banyaknya pasangan bilangan bulat  $(x, y)$  yang memenuhi  $x + y + FPB(x, y) + KPK(x, y) = 2015$  adalah ...  
 A. 0                      B. 2                      C. 4                      D. 6                      E. 8

37. Didefinisikan

$$f(x) = \binom{x+2}{2}, \text{ jika } x|2015$$

atau

$$f(x) = 0 \text{ jika } x \nmid 2015$$

Banyaknya pasangan bilangan bulat non-negatif  $(a, b, c, d)$  yang memenuhi  $ab + ac + ad = 2015$  adalah ...

- A.  $f(2015)$               B.  $f(403)$               C.  $\sum_{x=1}^{161} f(x)$               D.  $\sum_{x=1}^{444} f(x)$               E.  $\sum_{x=1}^{2086} f(x)$
38. Banyaknya bilangan bulat positif  $(x, y)$  yang memenuhi persamaan  $x^5 + y^5 + 1 = (x+2)^5 + (y-3)^5$  adalah ...  
 A. Tidak ada              B. 1                      C. 3                      D. 2015                      E. Tak hingga
39. Jika  $p$  dan  $p+2$  adalah bilangan prima yang lebih besar dari 2015, maka  $p+1$  pasti habis dibagi ...  
 A. 6                      B. 8                      C. 10                      D. 12                      E. 14
40. Jika  $a^2 + a, b^2 + b, c^2 + c$  adalah akar-akar polinomial  $P(x) = x^3 - x - 1$ , maka nilai dari

$$\frac{1-a-a^2}{1+a+a^2} + \frac{1-b-b^2}{1+b+b^2} + \frac{1-c-c^2}{1+c+c^2}$$

adalah ...

- A. -1                      B. 0                      C. 1                      D. 2                      E. 3

## 2 Isian Singkat

41. Banyaknya pasangan bilangan bulat  $(a, b, c)$  yang memenuhi  $a^2 + b^2 - 56c = 2015$  adalah ...
42. Bilangan bulat positif  $n$  yang kurang dari 1000 dan menyebabkan  $\frac{n^2-75}{5n+56}$  merupakan bilangan asli adalah ...
43. Misalkan  $a, b, c$  adalah bilangan real positif sedemikian sehingga  $\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{bc} = 1$ . Nilai minimum untuk
- $$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a}$$
- adalah ...
44. Tiga buah benteng tak identik diletakkan pada suatu papan catur berukuran  $5 \times 5$ . Banyak cara meletakkan ketiga benteng tersebut agar tak saling memakan adalah ...
45. Banyaknya bilangan prima  $p$  sedemikian sehingga  $4p^2 + 1$  dan  $6p^2 + 1$  merupakan bilangan prima yaitu ...