

# LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-27



Babak Penyisihan  
Tingkat SMA  
Minggu, 30 Oktober 2016

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA  
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS GADJAH MADA  
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR P .O. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281  
lmnas@ugm.ac.id — <http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>

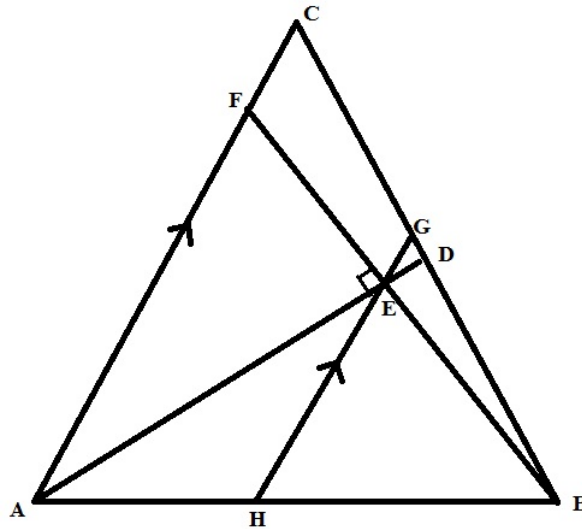
## PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA UGM KE-27

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Peserta wajib membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri pasfoto berukuran  $3 \times 4$ .
3. Peserta wajib membawa Kartu Tanda Peserta LMNAS 27 yang dapat diunduh dari web.
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk dan mengerjakan soal dengan waktu yang tersisa (tidak ada tambahan waktu).
6. Tulislah semua identitas diri Anda pada lembar jawaban yang disediakan.
7. Sebelum mengerjakan soal, periksalah kelengkapan naskah soal.
8. Bacalah dan kerjakan soal dengan cermat. Untuk soal pilihan ganda, pilih salah satu jawaban yang Anda anggap benar dengan menghitamkan bulatan huruf jawaban tersebut. Untuk soal isian singkat, cukup tuliskan jawaban akhir pada kotak yang tersedia.
9. Untuk soal pilihan ganda, jawaban benar bernilai +4, salah bernilai -1, kosong bernilai 0
10. Untuk soal isian singkat, jawaban benar bernilai +8, sedangkan salah atau kosong bernilai 0.
11. Apabila terdapat nilai yang sama maka yang diperhatikan pertama kali adalah jumlah benar pada isian singkat, kemudian jumlah salah pada pilihan ganda.
12. Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, HP, tabel matematika atau alat bantu hitung lainnya selama pengerjaan soal.
13. Selama waktu pengerjaan soal, HP, tablet atau alat elektronik lainnya harus dinonaktifkan.
14. Dilarang pinjam-meminjam alat tulis, bekerja sama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain selama lomba berlangsung.
15. Peserta tidak diperkenankan meninggalkan ruang lomba selama pengerjaan soal tanpa seizin pengawas ruang.
16. Jika peserta melakukan pelanggaran, maka pengawas ruang akan memberi peringatan. Jika pelanggaran dilakukan lebih dari 2 (dua) kali, maka peserta akan didiskualifikasi.
17. Untuk soal yang tidak ada ralat selama lomba berlangsung, maka soal harus dikerjakan apa adanya.
18. Waktu pengerjaan soal adalah 120 menit.
19. Setelah selesai lomba, tinggalkan pekerjaan anda di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan bersih dan tidak terlipat atau robek. Naskah soal boleh dibawa pulang.
20. Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 27. Sertifikat dibagikan setelah selesai mengikuti babak penyisihan.
21. Pengumuman hasil penyisihan dapat dilihat di web LMNAS 27 (<http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>) maksimal tanggal 7 November 2016. Keputusan dewan juri tidak dapat diganggu gugat.
22. Untuk peraturan lainnya yang belum jelas dapat ditanyakan kepada panitia pengawas.

# 1 Pilihan Ganda

- Diketahui  $a, b, c$  bilangan real berbeda yang tidak nol. Jika  $a + \frac{4}{b} = b + \frac{4}{c} = c + \frac{4}{a}$ , maka nilai  $|abc|$  adalah ...  
 A. 64                      B. 8                      C. 4                      D. 16                      E. 32
- Misalkan  $ABCD$  adalah persegi satuan dan  $P$  adalah sebarang titik dalam persegi  $ABCD$ . Jika  $AP = a, BP = b, CP = c$ , maka nilai minimal dari  $a\sqrt{2} + b + c$  adalah ...  
 A. 2                      B. 1                      C.  $\sqrt{2}$                       D.  $\sqrt{5}$                       E.  $\sqrt{2} + 1$
- Jika diketahui  $(1 - \sin x)(1 - \cos x) = \frac{25}{32}$ , maka nilai dari  $(1 + \sin x)(1 + \cos x)$  adalah ...  
 A.  $\frac{25}{32}$                       B.  $\frac{7}{32}$                       C.  $\frac{169}{32}$                       D.  $\frac{23}{32}$                       E.  $\frac{9}{32}$
- Himpunan  $\mathbb{R}$  merupakan himpunan semua bilangan real. Pada sebuah fungsi  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , berlaku  $f(x + 1) \leq f(x) + 1$  dan  $f(x - 27) \leq f(x) - 27$ , untuk sembarang bilangan real  $x$ . Bila diketahui  $f(1) = 2016$ , nilai dari  $f(2016) - 2016$  adalah ...  
 A. 2016                      B. 2018                      C. 2012                      D. 2014                      E. 2015
- Nilai dari  $\sqrt{4 + \sqrt{16 + \sqrt{64 + \sqrt{\dots}}}}$  adalah ...  
 A. 2                      B. 4                      C.  $4\sqrt{2}$                       D. 3                      E.  $2\sqrt{2}$
- Misalkan  $a, b, c, d$  bilangan real positif sedemikian hingga  $abcd = 1$ . Nilai minimum dari  $\frac{1 + ab}{1 + a} + \frac{1 + bc}{1 + b} + \frac{1 + cd}{1 + c} + \frac{1 + da}{1 + d}$  adalah ...  
 A. 8                      B. 2                      C. 0                      D. 4                      E. 6
- Jika  $a$  dan  $b$  adalah akar – akar dari  $x^2 + x + 1 = 0$ , maka nilai dari  $a^{2017} + b^{2017}$  adalah ...  
 A. 1                      B. -1                      C. 0                      D. 2                      E. -2
- Diberikan bilangan prima  $p$  dan  $q$  serta bilangan asli  $n$ . Banyaknya 3-tupel bilangan  $(p, q, n)$  sehingga  $x^2 - p^n x + q^n = 0$  memiliki akar bilangan bulat adalah ...  
 A. 2                      B. 1                      C. 0                      D. 3                      E. 4
- Misalkan diberikan bilangan desimal  $\overline{0,abc}$  dengan  $a, b, c$  bilangan asli. Posisi ke-1 adalah  $a$ , posisi ke-2 adalah  $b$ , dan posisi ke-3 adalah  $c$ . Diketahui  $H = \frac{1}{9} + \frac{1}{99} + \frac{1}{999} + \dots + \frac{1}{10^n - 1} + \dots$ . Jika  $H$  dibawa ke bentuk desimalnya, maka angka pada posisi ke-47 adalah ...  
 A. 0                      B. 1                      C. 2                      D. 3                      E. 4
- Diketahui  $a$  dan  $b$  bilangan real. Nilai minimal dari  $M = \max\{a + b^2, a^2 + b\}$  adalah ...  
 A.  $-\frac{1}{4}$                       B.  $\frac{1}{4}$                       C. 0                      D.  $\frac{1}{2}$                       E.  $-\frac{1}{2}$
- Misal  $m$  adalah solusi real terbesar dari persamaan  $\frac{3}{x-3} + \frac{5}{x-5} + \frac{17}{x-17} + \frac{19}{x-19} = x^2 - 11x - 4$  dan  $m$  berbentuk  $11 + \sqrt{a + b\sqrt{c}}$ , dengan  $a, b, c$  merupakan bilangan bulat positif dan  $c$  tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat sempurna selain 1. Nilai dari  $\frac{a-c}{b}$  adalah ...  
 A. -10                      B. -5                      C. 10                      D. 4                      E. 5

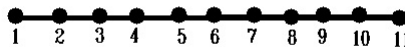
12. Perhatikan gambar berikut



Diberikan segitiga  $ABC$ .  $AD$  adalah garis bagi sudut  $A$ .  $BE$  tegak lurus  $AD$  dan  $EH$  sejajar  $CA$ .  $EH$  memotong  $BC$  di  $G$ . Jika diketahui  $AB = 26$ ,  $BC = 28$ ,  $AC = 30$ , maka panjang  $DG$  adalah ...

- A.  $\frac{5}{2}$       B. 2      C.  $\frac{3}{2}$       D. 1      E.  $\frac{1}{2}$

13. Diberikan gambar berikut.



Alzim akan pergi dari kota 1 ke kota 11. Pilihan transport yang mungkin yaitu kereta api dan pesawat. Kereta hanya dapat membawa Alzim ke kota terdekat dengan biaya 1 dollar. Sementara pesawat dapat membawa Alzim ke kota manapun dengan biaya 5 dollar. Alzim tidak ingin pergi dari satu kota ke kota lain yang nomornya lebih kecil. Jika  $p$  adalah total biaya yang diperlukan dari kota 1 ke kota 11, maka banyaknya kemungkinan nilai  $p$  adalah ...

- A. 38      B. 39      C. 40      D. 41      E. 42

14. Diketahui  $abc = 100$  dengan  $a, b, c$  bilangan asli. Jika diketahui  $a^{\log a} b^{\log b} c^{\log c} = 10000$ , maka nilai  $a + b + c$  yaitu ...

- A. 108      B. 106      C. 104      D. 101      E. 102

15. Diberikan bilangan  $a, b, c, d$  lebih dari nol dan memenuhi  $s = a + b + c + d = 1$ . Nilai minimum dari  $\frac{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}{abcd}$  adalah ...

- A. 9      B. 81      C. 64      D. 16      E. 100

16. Banyaknya bilangan asli  $1 \leq n \leq 2016$  sehingga terdapat bilangan prima  $p \geq n$  yang menyebabkan  $\frac{2016^p + (n-1)!}{n}$  merupakan bilangan asli adalah ...

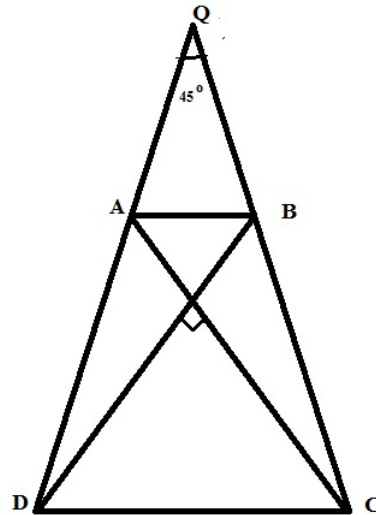
- A. 2017      B. 2016      C. 1438      D. 1436      E. 1437

17. Himpunan  $\mathbb{Q}$  merupakan himpunan semua bilangan rasional. Banyaknya fungsi  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  yang memenuhi  $f(xy) = f(x)f(y+1)$  untuk sembarang bilangan rasional  $x$  dan  $y$  adalah ...

- A. 0      B. 1      C. 2      D. 3      E. Tak Hingga

18. Ada empat pasang suami istri dalam suatu pesta. Mereka saling bersalaman jika belum saling kenal. Dodi salah satu dari mereka menanyakan, berapa kali masing - masing dari mereka bersalaman dan Dodi mendapati jawaban yang berbeda dari setiap orang. Dodi bersalaman sebanyak ... kali.
- A. 1                      B. 6                      C. 4                      D. 2                      E. 3
19. Jika  $x^{\log x^3} = \sqrt{10x}$ , maka hasil kali semua nilai  $x$  yang memenuhi adalah ...
- A.  $\sqrt[6]{10^{-1}}$               B.  $\sqrt[6]{10}$               C.  $\sqrt[5]{10^6}$               D.  $10^6$               E.  $-\sqrt[6]{10}$
20. Diberikan barisan  $a_1, a_2, a_3, \dots$ . Didefinisikan lompatan ke- $k$  dari barisan  $a_n$ , ditulis sebagai  $\circ a_k$  yaitu  $a_{k+1} - a_k$ . Kemudian dibentuk barisan  $b_1, b_2, \dots$  dengan  $b_k = \circ a_k$  untuk setiap bilangan asli  $k$ . Jika  $\circ b_k = 2016$  untuk sebarang  $k$  bilangan asli dan  $a_{20} = a_{16} = 0$ . Nilai dari  $a_{18}$  adalah ...
- A.  $-4064$               B.  $4064$               C.  $-4032$               D.  $4032$               E.  $2016$
21. Diberikan segi-2016 beraturan. Peluang terbentuknya segitiga yang bukan segitiga sama sisi yang dibentuk dari tiga titik sudut segi 2016 adalah ...
- A.  $1 - \frac{2016}{3 \cdot \binom{2016}{3}}$               B.  $1 - \frac{2016}{\binom{2016}{3}}$               C.  $\frac{2016}{3 \cdot \binom{2016}{3}}$               D.  $\frac{2016}{\binom{2016}{3}}$               E. 1
22. Diketahui  $a$  adalah solusi dari persamaan  $x^2 - 3x + 1 = 0$ . Nilai dari  $\frac{2a^5 - 5a^4 + 2a^3 - 8a^2}{a^2 + 1}$  adalah ...
- A. 0                      B.  $-2$                       C. 2                      D. 1                      E.  $-1$
23. Diberikan bilangan real  $x$  dan  $y$ . Nilai minimal dari  $x^4 + y^4 - 8|xy|$  adalah ...
- A.  $-16$                       B.  $-8$                       C. 0                      D.  $-2$                       E.  $-4$
24. Diberikan persegi  $ABCD$ . Titik tengah  $AB$  dan  $BC$  secara berturut - turut adalah  $E$  dan  $F$ . Titik  $O_1$  dan  $O_2$  secara berturut - turut titik pusat lingkaran dalam segitiga  $AED$  dan lingkaran dalam segiempat  $BFDE$ . Besar  $\angle DO_1O_2$  adalah ... $^\circ$ .
- A. 30                      B. 60                      C. 45                      D. 90                      E. 120
25. Nilai dari  $\cos^4 10^\circ + \cos^4 30^\circ + \cos^4 50^\circ + \cos^4 70^\circ + \cos^4 90^\circ$  adalah ...
- A.  $\frac{27}{16}$                       B.  $\frac{27}{8}$                       C.  $\frac{54}{16}$                       D.  $\frac{108}{27}$                       E.  $\frac{56}{27}$
26. Misalkan  $\sqrt{27} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$  dengan  $a_i$  bilangan bulat positif. Barisan  $a_1, a_2, \dots$  berulang setiap  $k$  suku, artinya  $a_i = a_{i+k}$ , untuk setiap  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Nilai  $a_0 + a_1 + \dots + a_k$  adalah ...
- A. 15                      B. 20                      C. 25                      D. 10                      E. 25
27. Didefinisikan  $f(x) = \text{maksimum}\{x_1 + x_2 + \dots + x_n\}$  dengan  $KPK(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$ , untuk setiap bilangan positif berbeda  $x_k$  dan untuk setiap bilangan asli  $k$ . Nilai dari  $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(20)$  adalah ...
- A. 185                      B. 155                      C. 347                      D. 339                      E. 324
28. Misalkan  $f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^{2016}x^{2016}$  dan  $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{2016}x^{2016}$  dengan  $a_1, a_2, \dots, a_{2016}$  bilangan real. Jika  $f(x) = g(x - 2)$ , maka digit terakhir dari  $1 + a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots + a_{2014} - a_{2015} + a_{2016}$  adalah ...
- A. 0                      B. 2                      C. 4                      D. 8                      E. 6

29. Perhatikan gambar di bawah ini.



Diketahui panjang  $AB = 4$  dan  $CD = 10$ ,  $AB$  sejajar  $CD$ ,  $\angle CQD = 45^\circ$ . Luas segiempat  $ABCD$  adalah ...

- A.  $\frac{70}{9}$       B.  $\frac{149}{9}$       C.  $\frac{70}{3}$       D.  $\frac{140}{3}$       E.  $\frac{49}{3}$
30. Diketahui  ${}^2 \log({}^{2^x} \log({}^{2^y} \log 2^{1000})) = 0$  untuk bilangan asli  $x$  dan  $y$ . Misalkan pasangan  $(x, y)$  yang memenuhi adalah  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ . Nilai dari  $x_1 + x_2 + \dots + x_n + y_1 + y_2 + \dots + y_n$  adalah ...
- A. 888      B. 879      C. 880      D. 882      E. 881
31. Dengan menggunakan persamaan  $x = r \cos \theta$  dan  $y = r \sin \theta$ , maka persamaan  $r = a \sin 3\theta$ ,  $a$  bilangan real, ekuivalen dengan ...
- A.  $(x^2 + y^2) = ay(3x^2 - y^2)$   
 B.  $(x^2 + y^2)^2 = ay(3x^2 - y^2)$   
 C.  $(x^2 + y^2) = ay(x^2 - y^2)$   
 D.  $(x^2 + y^2)^2 = ay(x^2 - 3y^2)$   
 E.  $(x^2 + y^2)^2 = a(3x^2 - y^2)$
32. Dua digit terakhir dari  $43^{2016^{2015}}$  adalah ...
- A. 39      B. 01      C. 49      D. 07      E. 43
33. Diketahui  $P$  sebuah titik di dalam segitiga  $ABC$ , dengan jarak antara titik  $P$  dan sisi  $AB, BC, CA$  berturut-turut adalah  $x, y, z$ . Supaya nilai  $xyz$  maksimum, titik  $P$  haruslah merupakan perpotongan ... dari segitiga  $ABC$ .
- A. Garis berat      B. Garis tinggi      C. Garis bagi      D. Garis sumbu      E. Semua benar
34. Jumlah semua nilai  $a$  sedemikian sehingga  $(x + 1991)(x + a) + 1$  adalah bilangan kuadrat untuk setiap  $x$  bilangan bulat adalah ...
- A. 8932      B. 3892      C. 3981      D. 3982      E. 3980
35. Dua buah lingkaran  $L_1$  dan  $L_2$  masing-masing memiliki pusat di  $A$  dan  $B$ . Titik  $B$  berada pada  $L_1$  dan titik  $A$  berada pada  $L_2$ .  $L_1$  dan  $L_2$  berpotongan di titik  $C$  dan  $D$ . Titik  $E$  dan  $F$  berada pada  $L_2$ , sedemikian sehingga ruas garis  $EF$  merupakan garis singgung  $L_1$  yang melalui  $B$ . Jika  $AE$  memotong  $L_1$  di titik  $G$  dan  $\angle DAG > \angle CAG$ . Besar  $\angle AGD$  adalah ...
- A.  $30^\circ$       B.  $37,5^\circ$       C.  $60^\circ$       D.  $82,5^\circ$       E.  $45^\circ$

36. Diberikan himpunan  $S = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2016}\}$ . Diambil sembarang  $a, b \in S$ , lalu ganti elemen tersebut dengan  $y = a + b + ab$ . Contoh : diambil  $\frac{1}{2}$  dan  $\frac{1}{4}$  maka  $\frac{1}{2}$  dan  $\frac{1}{4}$  keluar dari  $S$  lalu diganti  $\frac{7}{8}$ . Jika proses diulang sampai tersisa satu bilangan saja, maka bilangan yang terakhir tersisa adalah ...
- A. 2018                      B. 2016                      C. 2015                      D. 2014                      E. 2013
37. Misalkan titik  $A, B$ , dan  $C$  berturut-turut memiliki koordinat  $(0, 0)$ ,  $(2, 2)$ , dan  $(-3, 5)$ . Jefry akan memilih titik  $P$  di dalam segitiga  $ABC$  supaya perkalian jarak-jarak titik  $P$  dengan sisi-sisi segitiga  $ABC$  sebesar mungkin. Oleh karena itu, Jefry harus memilih titik  $P$  dengan koordinat ...
- A.  $(\frac{1}{4}, \frac{5}{4})$                       B.  $(\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$                       C.  $(-\frac{1}{3}, \frac{7}{3})$                       D.  $(-\frac{1}{4}, \frac{7}{4})$                       E.  $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$
38. Diberikan bilangan bulat positif  $m$  dan  $n$  sedemikian sehingga memenuhi  $m + 13n$  habis dibagi 11 dan  $m + 11n$  habis dibagi 13. Nilai minimum dari  $m + n$  adalah ...
- A. 30                      B. 29                      C. 28                      D. 26                      E. 32
39. Diberikan polinomial  $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$  yang akar - akarnya positif dan memenuhi  $(b - a)(a + b) + (d - c)(c + d) = ac - bd$ . Nilai dari  $(a + b + c + d)^2$  adalah ...
- A. 0                      B. 1                      C. 4                      D. 16                      E. 9
40. Segitiga  $ABC$  siku-siku di  $C$  memiliki panjang  $BC = 5$  dan  $AC = 12$ . Titik  $D$  berada pada  $AB$  dan titik  $E$  pada  $AC$ . Jika  $DE$  membagi segitiga  $ABC$  menjadi dua bagian dengan luas yang sama, maka panjang minimum  $DE$  adalah ...
- A. 2                      B.  $2\sqrt{2}$                       C.  $2\sqrt{3}$                       D. 3                      E.  $3\sqrt{2}$

## 2 Isian Singkat

41. Diketahui bilangan lima digit  $\overline{ALZIM}$  yang memenuhi  $\overline{ALZIM} \times 12 = \overline{ZIM0AL}$ . Bilangan  $\overline{ALZIM}$  adalah ...
42. Diketahui  $x_1 = 6$  dan  $x_2 = 7$ . dan  $x_{n+1} = (x_{n-1})^2 - (n + 2)x_n$ , untuk setiap bilangan asli  $n \geq 2$ . Nilai dari  $x_{2016}$  adalah ...
43. Alzim mempunyai suatu persegi dimana sisi-sisinya diberi nama  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Pada masing-masing sisinya terdapat 4 buah titik yang tidak berada pada ujung-ujung garis. Alzim ingin membuat segiempat dimana titik-titik sudut segiempat tersebut merupakan titik pada  $a_1, a_2, a_3, a_4$ . Banyaknya segiempat yang mungkin dibuat oleh Alzim adalah ...
44. Banyaknya bilangan positif  $n$  sehingga untuk semua bilangan ganjil  $a$  berlaku jika  $a^2 \leq n$  maka  $a$  habis membagi  $n$  adalah ...
45. Diberikan bilangan asli  $m$  dan  $n$  sedemikian sehingga  $\frac{m + n}{m^2 + mn + n^2} = \frac{4}{49}$ . Nilai dari  $m + n$  adalah ...