

LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-25



Babak Penyisihan
Tingkat SMP
Minggu, 9 November 2014

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR P .O. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281
lmnas@ugm.ac.id — <http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>

PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA UGM KE-25

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri pasfoto berukuran 3×4 .
3. Setiap peserta diwajibkan membawa Kartu Tanda Peserta LMNAS 25 yang dapat diunduh dari web.
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk dan mengerjakan soal dengan waktu yang tersisa (tidak ada tambahan waktu).
6. Tulislah semua identitas diri Anda pada lembar jawaban pilihan ganda dan lembar jawaban isian singkat.
7. Sebelum mengerjakan soal, periksalah kelengkapan naskah soal.
8. Bacalah dan kerjakan soal dengan cermat. Untuk soal pilihan ganda, pilih salah satu jawaban yang Anda anggap benar dengan menghitamkan bulatan huruf jawaban tersebut. Untuk soal isian singkat, cukup tuliskan jawaban akhir pada kotak yang tersedia.
9. Untuk soal pilihan ganda, jawaban benar bernilai +4, salah bernilai -1, kosong bernilai 0
10. Untuk soal isian singkat, jawaban benar bernilai +8, sedangkan salah atau kosong bernilai 0.
11. Apabila terdapat nilai yang sama maka yang diperhatikan pertama kali adalah jumlah benar pada isian singkat, kemudian jumlah benar pada pilihan ganda.
12. Tidak diperkenankan menggunakan kalkulator, HP, tabel matematika atau alat bantu hitung lainnya selama pengerjaan soal.
13. Selama waktu pengerjaan soal HP, tablet, PDA atau alat elektronik lainnya harus dinonaktifkan.
14. Dilarang pinjam-meminjam alat tulis, bekerja sama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain selama lomba berlangsung.
15. Peserta tidak diperkenankan meninggalkan ruang lomba selama pengerjaan soal tanpa seizin pengawas ruang.
16. Jika peserta melakukan pelanggaran, maka pengawas ruang akan memberi peringatan. Jika pelanggaran dilakukan lebih dari 2 (dua) kali, maka peserta akan didiskualifikasi.
17. Waktu pengerjaan soal adalah 120 menit. Untuk soal yang tidak ada ralat selama lomba berlangsung, maka soal harus dikerjakan apa adanya.
18. Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 25
19. Keputusan dewan juri tidak dapat diganggu gugat.
20. Untuk peraturan lainnya yang belum jelas dapat ditanyakan kepada panitia pengawas.

1 Pilihan Ganda

1. Pada $\triangle ABC$, titik D berada pada sisi AC sehingga $AB = AD$. $\angle ABC - \angle ACB = 30^\circ$. Tentukan $\angle CBD$!

A. 5° B. 10° C. 15° D. 20° E. 25°

2. Jika a, b, c adalah bilangan-bilangan taknol yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned} a + b + c &= -1 \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 1 \end{aligned}$$

tentukan nilai dari

$$\frac{ab}{c} + \frac{ac}{b} + \frac{bc}{a}$$

A. -1 B. 0 C. 1 D. 2 E. 3

3. Jika $p(n)$ adalah hasil kali digit-digit taknol dari n untuk setiap bilangan bulat positif n , tentukan faktor prima terbesar

$$p(1) + p(2) + \cdots + p(99)$$

A. 7 B. 13 C. 23 D. 47 E. 53

4. Di dalam sebuah kantong terdapat 80 anting putih, 20 anting merah, 60 anting biru, dan 50 anting kuning. Anwar diminta mengambil beberapa anting dari kantong tersebut. Andaikan Anwar tidak dapat melihat warna anting pada saat mengambilnya, berapa minimal banyaknya anting yang harus diambil Anwar agar pasti memperoleh 25 pasang anting? (sepasang anting mempunyai warna yang sama dan tidak ada anting yang dihitung dalam pasangan yang berbeda)

A. 50 B. 51 C. 52 D. 53 E. 55

5. Tentukan banyaknya bilangan asli n sehingga

$$(3n - 4), (4n - 5), (5n - 13)$$

ketiganya merupakan bilangan prima.

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 5

6. Diberikan

$$x = 1234567 \cdots 20132014$$

dimana digit-digitnya diperoleh dengan menuliskan bilangan 1 sampai 2014 secara berurutan. Tentukan digit ke 2014 dari kiri x .

A. 7 B. 6 C. 3 D. 1 E. 0

7. Diketahui $f(x) + 3f(-x) = 4x$. Tentukan penyelesaian positif dari

$$f(x) = 2f\left(\frac{1}{x}\right)$$

A. 0 B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. $\sqrt{3}$ E. $\sqrt{5}$

8. Berapa banyak angka 3 digit tanpa memuat angka 0, dengan 3 digitnya berbeda atau dua digitnya sama ?
 A. 504 B. 747 C. 990 D. 600 E. 720
9. Pada $\triangle ABC$, titik D dan E berturut-turut berada pada sisi BA dan CA sehingga $BC \parallel DE$. Titik F berada pada ruas garis AD sehingga $DC \parallel FE$. Jika $AF = 4$ dan $FD = 6$, maka tentukan panjang BD .
 A. 20 B. 15 C. 10 D. 8 E. 6
10. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif di antara 1234 dan 5678 yang semua digitnya berbeda.
 A. 2271 B. 2500 C. 2525 D. 2437 E. 2014
11. Tentukan bilangan asli terkecil n sehingga n mempunyai sisa berturut-turut 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 jika dibagi 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
 A. 239 B. 419 C. 517 D. 768 E. 839
12. Diketahui lingkaran O_1 berpusat di titik O dengan jari-jari 4. Jika titik A dan B berada pada lingkaran O_1 dan panjang $AB = 4\sqrt{3}$, tentukan luas juring AOB .
 A. $\frac{16}{3}\pi$ B. $\frac{10}{3}\pi$ C. $\frac{7}{3}\pi$ D. $\frac{4}{3}\pi$ E. $\frac{1}{2}\pi$
13. Tentukan banyaknya bilangan bulat positif lebih dari 2014 yang merupakan faktor dari $3 \cdot 5^2 \cdot 11^7 \cdot 13^8$.
 A. 400 B. 401 C. 402 D. 403 E. 404
14. Di dalam sebuah $\triangle ABC$ samasisi, dibuat 3 lingkaran dengan jari-jari sama sehingga ketiganya saling bersinggungan dan masing-masing bersinggungan dengan 2 dari 3 sisi $\triangle ABC$. Tentukan jari-jari lingkaran tersebut.
 A. $\frac{2}{1+\sqrt{2}}$ B. $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$ C. $\frac{4}{1+\sqrt{3}}$ D. $\frac{4}{1+\sqrt{2}}$ E. $\frac{2}{1+\sqrt{3}}$
15. Sebuah segitiga samasisi mempunyai luas $2\sqrt{3}$. Dari titik tengah masing-masing sisinya, ditarik garis tegak lurus terhadap 2 sisi lainnya. Berapa luas segienam yang dibentuk oleh keenam garis tersebut ?
 A. $\frac{1}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. 1 D. $\sqrt{3}$ E. $\frac{1}{2}\sqrt{3}$
16. Daniel memilih suku-suku barisan geometri $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$ untuk membentuk barisan geometri tak berhingga baru yang jumlahnya $\frac{1}{24}$. Tentukan jumlah suku pertama dan rasio dari deret baru tersebut.
 A. $\frac{5}{28}$ B. $\frac{4}{27}$ C. $\frac{1}{21}$ D. $\frac{3}{17}$ E. $\frac{2}{15}$
17. Diketahui barisan bilangan bulat (x_n) dengan $x_0 = 3, x_1 = 4$ dan

$$x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$$
 untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tentukan nilai x_{2014} .
 A. 2013 B. 2014 C. 2015 D. 2016 E. 2017
18. Tentukan banyaknya segitiga tumpul yang mungkin dibentuk jika panjang sisi-sisinya adalah bilangan asli dan sisi terpanjangnya 25.
 A. 83 B. 84 C. 85 D. 86 E. 87
19. Tentukan banyaknya bilangan asli n , $1 \leq n \leq 25$ sehingga

$$n^2 + 25n + 2014$$

habis dibagi 6.

- A. 3 B. 6 C. 9 D. 12 E. 15

20. Carilah nilai maksimum dari $x^2 + y^2$, jika diketahui persamaan

$$x^2 + y^2 - 10x - 4y - 20 = 0$$

- A. $78 + 14\sqrt{29}$ B. $76 + 14\sqrt{29}$ C. $76 + 14\sqrt{26}$ D. $74 + 14\sqrt{29}$ E. $72 + 14\sqrt{26}$

21. Tentukan sisa pembagian

$$\sum_{n=1}^{2014} n^3$$

oleh 7.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 5

22. Carilah banyaknya pasangan bilangan rasional (x, y) dengan sifat

$$x^2 + y^2 = x^3 + y^3$$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. tak berhingga

23. Dengan hanya menggunakan uang koin bernilai 1 sen, 5 sen, 10 sen, dan 25 sen. Berapa banyak koin minimal yang dibutuhkan untuk membayar berapapun harga yang lebih rendah dari 100 sen dengan uang pas ?

- A. 10 B. 12 C. 13 D. 15 E. 20

24. Diketahui

$$x + \frac{1}{y} = 1, y + \frac{1}{z} = 2, z + \frac{1}{x} = 5,$$

tentukan nilai dari xyz .

- A. 8 B. 6 C. 4 D. 2 E. 1

25. Diketahui LMNAS25 diikuti oleh 2014 peserta. Andi berada diantara 2014 peserta tersebut. Berapa peluang Andi lolos babak final dengan peringkat kedua dan mendapat peringkat 1 di final?

- A. $\frac{1}{2013}$ B. $\frac{1}{2014}$ C. $\frac{1}{10070}$ D. $\frac{1}{2015}$ E. $\frac{2}{2015}$

26. Tentukan banyaknya persegi yang terdapat pada papan catur berukuran 8 x 8.

- A. 200 B. 202 C. 204 D. 206 E. 208

27. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi

$$x^2 + y^2 = 2014911$$

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 5

28. Trapesium $ABCD$ mempunyai sisi sejajar AB dan CD dengan panjang 10 dan 20. Jika panjang $AD = 6$ dan $BC = 8$, carilah luas $\triangle ABC$.

- A. 20 B. 28 C. 18 D. 24 E. 21

29. Tentukan nilai x yang memenuhi persamaan

$$\sqrt{2014 + x\sqrt{2014 + x\sqrt{2014 + \dots}}} = 2014$$

- A. 2012 B. 2013 C. 2014 D. 2015 E. 2017

30. Carilah bilangan prima terkecil yang membagi habis $2014^{25} + 2015^{2015}$.

- A. 2 B. 3 C. 7 D. 11 E. 17

31. Bilangan-bilangan prima p, q, r memenuhi persamaan

$$pq + pr = 130 \text{ dan } pq + qr = 112$$

Carilah nilai dari $p + q + r$.

- A. 13 B. 17 C. 20 D. 23 E. 25

32. Terdapat dua titik A dan B pada sebuah bidang datar dengan jarak antara titik A dan B adalah 5. Berapa banyak garis lurus pada bidang datar tersebut sehingga jarak garis tersebut dari A adalah 2 dan jarak dari B adalah 3 ?

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 4 E. tak berhingga

33. Tentukan banyaknya pasangan bilangan bulat positif (d_1, d_2, d_3) dengan $d_1 < d_2 < d_3$ sehingga ketiganya merupakan pembagi 144 dan $d_1 d_2 d_3$ membagi habis 144.

- A. 47 B. 41 C. 33 D. 25 E. 24

34. Diketahui $f(x) = \frac{4}{4^x+2}$ untuk setiap bilangan real x . Hitunglah

$$f\left(\frac{1}{2015}\right) + f\left(\frac{2}{2015}\right) + \dots + f\left(\frac{2014}{2015}\right)$$

- A. 2014 B. 2013 C. 2 D. 1 E. 0

35. Carilah bilangan bulat positif terbesar yang membagi semua bilangan

$$1^5 - 1, 2^5 - 2, \dots, n^5 - n, \dots$$

- A. 2 B. 3 C. 5 D. 15 E. 30

36. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf dan angka "L", "M", "N", "A", "S", "2", "5" sehingga di antara kedua angka terdapat tepat satu huruf ?

- A. 120 B. 200 C. 300 D. 600 E. 1200

37. Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan panjang $AB = 2\sqrt{3}$ dan $BC = 4$. Titik E dan F berturut-turut merupakan titik tengah sisi AD dan BC . Dibentuk lingkaran O_1 dan O_2 dengan titik pusat berturut-turut E dan F . Jika jari-jari lingkaran O_1 dan O_2 adalah 2, tentukan luas daerah irisan kedua lingkaran tersebut.

- A. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ B. $\frac{2}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ C. $\frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3}$ D. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$ E. $\frac{4}{3}\pi - 4\sqrt{3}$

38. Diberikan fungsi $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}^+$ memenuhi $f(1) = 2014$ dan

$$f(1) + f(2) + \dots + f(n) = n^2 f(n)$$

untuk setiap $n > 1$. Hitunglah nilai dari $f(2014)$.

- A. $\frac{2}{2015}$ B. $\frac{1}{2014}$ C. $\frac{3}{2014}$ D. $\frac{1}{2014 \cdot 2015}$ E. 1

39. Tentukan jumlah semua bilangan bulat p sehingga

$$\frac{15p + 21}{10p - 4}$$

merupakan bilangan bulat.

- A. 4 B. 2 C. 0 D. -1 E. -4

40. Diberikan segi empat $ABCD$ dengan $AB = 9$, $BC = 12$, $CD = 13$, $DA = 14$, dan diagonal $AC = 15$. Titik P dan Q berada pada AC sehingga BP dan DQ tegak lurus AC . Carilah panjang PQ .

- A. 2 B. $\frac{5}{2}$ C. 3 D. $\frac{7}{2}$ E. $\frac{7}{3}$

2 Isian Singkat

41. Diketahui persegi panjang $ABCD$ dengan $AB = 1$ dan $AD = 2$. Titik E berada pada garis perpanjangan AB sehingga $AE = 3$. Titik G merupakan titik tengah BC dan F titik sehingga $BEFG$ merupakan persegi panjang. Jika titik O merupakan perpotongan garis AF dan DB , maka tentukan panjang AO .

42. Tentukan himpunan solusi persamaan berikut.

$$\sqrt{x + \sqrt{2x - 1}} + \sqrt{x - \sqrt{2x - 1}} = \sqrt{2}$$

43. Diketahui m, n, r, p adalah bilangan-bilangan prima yang memenuhi persamaan $m - n = n - r + 3$ dan $n - p = 976$. Tentukan nilai maksimum dari m jika $m < 1001$.

44. Diberikan $\triangle AOB$ siku-siku sama kaki dengan $\angle AOB = 90^\circ$. Panjang $AB = m$ dan titik P terletak pada ruas garis AB sehingga panjang $AP = AO$. Tentukan panjang jari-jari lingkaran yang memenuhi syarat-syarat berikut :

- (i) Berpusat di ruas garis AB
 (ii) Melalui titik P
 (iii) Menyinggung ruas garis AO

45. Diketahui himpunan $M_i = \{1, 2, 3, \dots, i\}$ dengan $1 \leq i \leq 2014$. Jika dari masing-masing M_i diambil satu bilangan secara acak, tentukan besar peluang hasil kali bilangan-bilangan yang terambil adalah bilangan ganjil.

— Selamat Mengerjakan, Semoga Sukses —