

LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-28



Babak Penyisihan
Tingkat SMA
Minggu, 29 Oktober 2017

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR P.O. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281
lmnas@ugm.ac.id — <http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>

PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA UGM KE-28

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri foto.
3. Setiap peserta diwajibkan membawa tanda peserta berupa Kartu Tanda Peserta LMNAS 28 yang sudah disertai foto.
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk tetapi tidak diberikan waktu tambahan.
6. Bacalah petunjuk pengisian lembar jawaban sebelum Anda mulai mengisi lembar jawaban.
7. Sebelum mengerjakan soal, periksalah kelengkapan naskah soal.
8. Bacalah dan kerjakan soal dengan cermat. Untuk soal pilihan ganda, pilih salah satu jawaban yang Anda anggap benar dengan memberi tanda silang pada huruf jawaban tersebut pada lembar jawab. Untuk soal isian singkat, cukup tuliskan jawaban akhir pada kotak yang tersedia.
9. Untuk soal pilihan ganda, **jawaban benar bernilai +4, jawaban salah bernilai -1, dan kosong bernilai 0.**
10. Untuk soal isian singkat, **jawaban benar bernilai +8, sedangkan jawaban salah atau kosong bernilai 0.**
11. Apabila terdapat nilai yang sama, maka yang diperhatikan pertama kali adalah cacah jawaban benar pada isian singkat kemudian cacah jawaban salah pada pilihan ganda.
12. Tidak diperkenankan menggunakan alat bantu hitung seperti kalkulator, HP, tabel matematika dan alat bantu hitung lainnya selama pengerjaan soal dan harus dinonaktifkan.
13. Dilarang pinjam-meminjam alat tulis, bekerjasama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain, selama lomba berlangsung.
14. Peserta tidak diperkenankan meninggalkan ruang lomba sampai waktu pengerjaan soal usai tanpa seizin pengawas ruang.
15. Jika peserta melakukan pelanggaran, maka pengawas ruang akan memberi peringatan. Jika pelanggaran dilakukan lebih dari 2 (dua) kali, maka peserta akan didiskualifikasi.
16. Untuk soal yang tidak ada ralat selama lomba berlangsung, maka dikerjakan apa adanya.
17. Waktu pengerjaan soal adalah 120 menit.
18. Setelah waktu pengerjaan usai, tinggalkan pekerjaan Anda di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan tidak terlipat atau robek. Naskah soal boleh dibawa pulang.
19. **Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 28 sampai akhir kegiatan.**

20. Peserta yang lolos dari babak penyisihan adalah:
 - a) Satu peserta dengan nilai terbaik pada titik penyisihan yang jumlah pesertanya kurang dari 40 orang.
 - b) Dua peserta dengan nilai terbaik pada titik penyisihan yang jumlah pesertanya lebih dari atau sama dengan 40 orang.
 - c) Peserta selain pada poin a) dan b) dengan nilai terbaik diurutkan secara nasional untuk menggenapi 75 besar.
21. Pengumuman hasil penyisihan dapat dilihat di web LMNAS 28 (<http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>) maksimal tanggal 5 November 2017.
22. Keputusan dewan juri tidak dapat diganggu gugat.
23. Untuk peraturan lainnya yang belum jelas dapat ditanyakan kepada panitia pengawas.

1 Pilihan Ganda

1. Nilai dari

$$\cos(56^\circ) \cdot \cos(2 \cdot 56^\circ) \cdot \cos(2^2 \cdot 56^\circ) \dots \cos(2^{23} \cdot 56^\circ)$$

adalah ...

- A. 2^{-24} B. 2^{-23} C. 2^{24} D. 2^{23} E. 2^{-28}

2. Banyaknya polinomial $P(x)$ yang memenuhi $P(28) = 28!$ dan $xP(x-1) = (x-28)P(x)$ adalah ...

- A. Tak hingga B. 1 C. 0 D. 28 E. 27

3. Diberikan bilangan real x yang memenuhi $(x + \frac{1}{x})^2 = 3$. Bentuk sederhana dari $x^{2017} + x^{67} + x^{44} + x^{31} + x^{26} + x + 6$ adalah ...

- A. x B. 6 C. $x + x^2$ D. 0 E. 3

4. Banyaknya bilangan real t yang memenuhi persamaan $\sin^4 t - \cos^4 t = 1$ dengan $-\pi \leq t \leq \pi$ adalah ...

- A. 0 B. 4 C. 8 D. 2 E. 1

5. Diberikan polinomial $p(x)$ berderajat 2017 yang mempunyai 2017 akar-akar positif berbeda dan hasil kalinya 2017. Didefinisikan $q(x) = p(x^2)$ dan $b_1, b_2, \dots, b_{4034}$ adalah akar-akar $q(x)$ dengan $b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_{4034}$. Nilai dari $b_1 b_2 \dots b_{2017}$ adalah ...

- A. $\sqrt{2017}$ B. $-\sqrt{2017}$ C. 2017 D. -2017 E. $\frac{\sqrt{2017}}{2017}$

6. Untuk setiap bilangan asli n didefinisikan $S(n)$ yang merupakan jumlahan digit-digit n dan $f(n) = n - S(n)$. Sisa pembagian dari $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \dots \circ f)}_{\text{sebanyak 2017}}(2017^{2017})$ oleh 9 adalah ...

- A. 0 B. 1 C. 3 D. 6 E. 2

7. Diberikan bilangan bulat positif a, b, c , dan d yang memenuhi

$$\begin{aligned} \log_a b &= \frac{3}{2} \\ \log_c d &= \frac{5}{4} \\ a - c &= 9. \end{aligned}$$

Misalkan $X = b - d$. Jumlahan digit-digit dari X adalah ...

- A. 10 B. 12 C. 11 D. 9 E. 16

8. Misalkan pasangan bilangan bulat (x, y) memenuhi

$$x^3 + (x+1)^3 + \dots + (x+7)^3 = y^3$$

dan m merupakan jumlahan semua nilai x dan y yang mungkin. Nilai dari m adalah ...

- A. -6 B. 0 C. 1 D. -1 E. 6

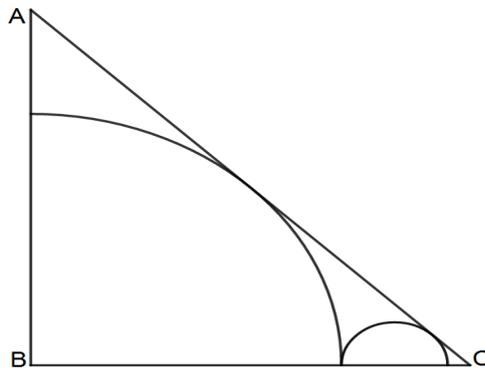
9. Diberikan bilangan real $a, m \in (-2, 2)$ dengan $am = -1$. Nilai minimum dari

$$u = \frac{1}{1-a^2} + \frac{4}{4-m^2}$$

adalah ...

- A. $\sqrt{2}$ B. $-\sqrt{2}$ C. 2 D. $2\sqrt{2}$ E. 4

10. Misalkan m merupakan nilai terbesar dari z yang memenuhi $x + y + z = 5$ dan $xy + xz + yz = 3$. Jika m dapat dituliskan sebagai $m = \frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat positif yang relatif prima, nilai dari $p + q$ adalah
- A. 11 B. 12 C. 17 D. 14 E. 16
11. Sebuah bilangan asli n dikatakan *wibu* jika untuk setiap a pembagi positif n berlaku $a + 1$ membagi $n + 1$. Banyaknya bilangan *wibu* yang kurang dari atau sama dengan 100 adalah
- A. 25 B. 27 C. 26 D. 28 E. 29
12. Diberikan bilangan 1 sampai 10 yang disusun melingkar secara acak. Diketahui N adalah suatu bilangan sedemikian hingga selalu dapat dipilih 3 angka bersebelahan pada lingkaran tersebut yang jumlahnya lebih dari atau sama dengan N . Nilai maksimum yang mungkin dari N adalah
- A. 15 B. 20 C. 18 D. 19 E. 17
13. Banyaknya bilangan asli n sehingga $2^n + 12^n + 211^n$ merupakan kuadrat sempurna adalah
- A. Tak hingga B. 0 C. 2 D. 1 E. 4
14. Diberikan bilangan real non negatif l, m, n, a , dan s yang memenuhi $l + m + n + a + s = 28$. Misalkan $x = \max \{l + m + n, m + n + a, n + a + s\}$. Nilai terkecil yang mungkin dari x adalah
- A. 28 B. 20 C. 24 D. 14 E. 27
15. Perhatikan gambar berikut



- Diketahui $AB = BC$ dan panjang jari-jari seperempat lingkaran adalah 1. Misalkan panjang jari-jari setengah lingkaran kecil dapat dinyatakan sebagai $a - b\sqrt{c}$ dengan a, b , dan c merupakan bilangan bulat positif dan c bilangan prima, maka nilai dari $a + b + c$ adalah
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 7 E. 3
16. Diberikan 7 titik yang terletak pada sisi sebuah lingkaran dan membentuk segi-7 beraturan. Dipilih 3 titik dari 7 titik tersebut dan peluang terbentuknya segitiga lancip dengan cara menghubungkan ketiga titik tersebut dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat positif yang relatif prima. Nilai dari $p + q$ adalah
- A. 7 B. 5 C. 4 D. 8 E. 6
17. Diberikan polinomial $P(x)$ berderajat n dengan n bilangan asli yang memenuhi $n \leq 2017$. Diketahui $P(k) = k$ untuk setiap bilangan bulat non negatif k yang kurang dari sama dengan 2017. Nilai dari $P(2018)$ adalah
- A. 2017 B. 2017! C. 2018! D. 2018 E. 2016!

18. Banyaknya bilangan bulat n yang memenuhi $(n - 3) \mid (n^3 - 3)$ adalah

- A. 16 B. 3 C. 0 D. 8 E. 4

19. Empat digit terakhir dari 2017^{2017} jika ditulis dalam sistem biner adalah

- A. 0011 B. 0111 C. 0101 D. 1001 E. 0001

20. Nilai dari

$$\sqrt{2 + \sqrt[3]{6 + \sqrt[4]{14 + \sqrt[5]{30 + \dots}}}}$$

adalah

- A. 6 B. 2 C. 4 D. 8 E. 3

21. Diberikan barisan a_0, a_1, \dots, a_n yang memenuhi

$$a_0 \neq 0$$

$$a_1 = \sqrt{3}$$

$$a_n a_m = a_{n+m} + a_{n-m}$$

untuk setiap bilangan asli $n \geq m \geq 0$. Misalkan $A = \{a_i \mid i = 0, 1, 2, \dots\}$, nilai dari $|A|$ adalah

- A. Tak hingga B. 4 C. 7 D. 3 E. 6

22. Diberikan segiempat sebarang yang titik sudutnya berada pada keempat sisi persegi yang mempunyai panjang sisi 4. Diketahui a, b, c , dan d merupakan panjang sisi segiempat tersebut dan $m = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$. Nilai minimum yang mungkin dari m adalah

- A. 16 B. 8 C. 4 D. 32 E. 64

23. Untuk setiap bilangan real x didefinisikan $[x]$ adalah bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Diketahui x_1 dan x_2 merupakan solusi dari

$$\left[\frac{25x - 2}{4} \right] = \frac{13x + 4}{3}$$

Misalkan $x_1 + x_2 = \frac{a}{b}$ dengan a dan b merupakan bilangan bulat positif yang relatif prima. Nilai dari $a + b$ adalah

- A. 43 B. 40 C. 45 D. 42 E. 44

24. Didefinisikan fungsi $f(n)$, dengan $f(0) = 1, f(1) = 1$ dan

$$f(n) = f(n-1) \left(\frac{f(n-2) + f(n-1)}{f(n-2)} \right)$$

untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$. Bilangan asli k terbesar yang memenuhi $10^k \mid f(2017)$ adalah

- A. 501 B. 502 C. 500 D. 503 E. 504

25. Dari bilangan-bilangan $1, 2, 3, \dots, 2017$ akan dipilih sebanyak k bilangan. Nilai k terkecil yang mungkin sehingga pasti terdapat bilangan a dan b yang dipilih dari k bilangan tersebut yang memenuhi $a \mid b$ adalah

- A. 1009 B. 1008 C. 1010 D. 1007 E. 1011

26. Diberikan barisan a_n dengan

$$a_0 = 28$$

$$a_n = 28 \cdot 2017^{a_{n-1}}$$

Digit terakhir dari a_{2017} adalah

- A. 3 B. 4 C. 2 D. 6 E. 8

27. Diberikan fungsi real f yang memenuhi

$$f(8x) \geq f^8(x)$$

$$f(2x) \leq f^2(x)$$

$$f(1) = \sqrt{2}.$$

Nilai dari $f(2048)$ adalah

- A. 2^{1024} B. 2048 C. 2048^2 D. 2^{2048} E. 1024

28. Diberikan himpunan $S \subset \{1, 2, \dots, 9\}$ sedemikian hingga jumlahan dua elemen di S semuanya berbeda. Nilai maksimum yang mungkin dari $|S|$ adalah

- A. 5 B. 7 C. 6 D. 4 E. 8

29. Diberikan fungsi f dengan $|f(x)| \leq 1$ dan $f(x) = f(x + 2017)$ untuk setiap bilangan real x . Diketahui fungsi f mempunyai 3 akar berbeda pada interval $[0, 4034]$. Jumlah semua bilangan real y yang memenuhi $\sin f(y) = 0$ adalah

- A. 1 B. 2017 C. 2018 D. 0 E. 2019

30. Diberikan $F(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{2017}$. Sisa pembagian $F(x^5)$ jika dibagi $1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ adalah

- A. 2017 B. 2018 C. $x + 2017$ D. $x + 2018$ E. 0

31. Diberikan bilangan real L dan M . Diketahui $(x - 1)^2$ habis membagi polinomial $F(x) = x^{28} - Lx^{27} + Mx - 1$ dan $A = L + M$. Jika A dapat dinyatakan sebagai $A = \frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat positif yang relatif prima, maka nilai dari $p + q$ adalah

- A. 27 B. 28 C. 42 D. 39 E. 41

32. Diberikan polinomial $F(x) = (1 - 28x + 28x^2)^{2017}(1 + 28x - 28x^2)^{2018}$. Diketahui $F(x)$ dapat dinyatakan sebagai $F(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{8070}x^{8070}$ dan $L = a_0 + a_1 + \dots + a_{8070}$. Nilai dari $L - a_1$ adalah

- A. 28 B. 27 C. 2017 D. 2018 E. 1

33. Untuk setiap bilangan asli $n \geq 1$ didefinisikan

$$S_n = 1 \cdot \binom{n}{1} - 2 \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n n \binom{n}{n}$$

dan $A = \{S_n \mid 1 \leq n \leq 28\}$. Nilai dari $|A|$ adalah

- A. Tak hingga B. 2 C. 4 D. 8 E. 16

34. Diketahui x_1, x_2 , dan x_3 dengan $x_1 < x_2 < x_3$ merupakan 3 akar real dari persamaan $\sqrt{2017}x^3 - 2018x^2 + 1$. Nilai dari $x_2(x_1 + x_3)$ adalah

- A. 2017 B. $\sqrt{2017}$ C. 1 D. -1 E. $-\sqrt{2017}$

35. Banyaknya bilangan asli n sehingga $n^4 - 4n^3 + 14n^2 - 20n - 3$ merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah
- A. Tak hingga B. 1 C. 0 D. 2 E. 4

36. Untuk setiap bilangan bulat non negatif x didefinisikan

$$f(x) = 2^{3x} + 3^{6x+2} + 5^{6x+2}.$$

Nilai dari $\gcd(f(0), f(1), \dots, f(2017))$ adalah

- A. 5 B. 35 C. 7 D. 28 E. 1
37. Banyaknya bilangan asli $n > 1$ sehingga $n^4 + 4^n$ merupakan bilangan prima adalah
- A. 0 B. 1 C. 4 D. 2 E. Tak hingga
38. Banyaknya pasangan bilangan prima (p, q) sehingga $p^3 - q^5 = (p + q)^2$ adalah
- A. 0 B. 2 C. 3 D. Tak hingga E. 1
39. Misalkan $[x]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang kurang dari atau sama dengan x . Diberikan himpunan

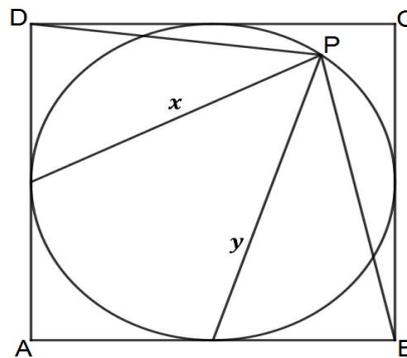
$$A = \left\{ \left\lfloor \frac{k^2}{2017} \right\rfloor, k = 1, 2, \dots, 2017 \right\}.$$

. Nilai dari $|A|$ adalah

- A. 1513 B. 1510 C. 1511 D. 1516 E. 1514
40. Banyaknya subset dari himpunan $\{1, 2, \dots, 28\}$ sedemikian hingga jumlahan setiap elemennya merupakan bilangan genap adalah
- A. $2^{27} - 1$ B. 2^{27} C. $2^{28} - 1$ D. 2^{28} E. $28!$

2 Isian Singkat

41. Suatu tripel bilangan bulat disebut tripel *LMNAS* jika ketiga bilangan tersebut dapat diberi label a, b , dan c sehingga $a - b + c = 28$. Banyaknya 28-tupel bilangan bulat $(a_1, a_2, \dots, a_{28})$ sehingga jika semua bilangan tersebut disusun melingkar searah jarum jam maka setiap tiga bilangan bersebelahan membentuk tripel *LMNAS* adalah
42. Diberikan suatu papan persegi yang dibagi menjadi $n \times n$ petak persegi berukuran sama besar, dengan n adalah bilangan asli kelipatan 3. Setiap petak akan diwarnai hijau atau merah. Misalkan a merupakan banyaknya petak merah maksimum sehingga setiap kain persegi yang menutupi tepat $m \times m$ petak ($m > 1$) pada papan tersebut membuat banyaknya petak hijau yang tertutupi tidak lebih sedikit dari banyaknya petak merah yang tertutupi. Nilai dari a adalah
43. Diberikan persegi $ABCD$ dan lingkaran berpusat di O yang menyinggung sisi AB, BC, CD , dan DA berturut-turut di E, F, G , dan H seperti gambar di bawah



Diketahui jari-jari lingkaran adalah 10 dan titik P pada lingkaran sedemikian hingga panjang EP, HP, BP , dan DP berturut-turut adalah $y, x, 2\sqrt{75} - 10\sqrt{5}$ dan $2\sqrt{75} + 10\sqrt{5}$. Nilai dari $|y^2 - x^2|$ adalah

44. Bilangan asli a dengan $1 \leq a \leq 2017^{2017}$ disebut *unit* jika terdapat bilangan asli y sehingga ay bersisa 1 jika dibagi 2017. Banyaknya bilangan *unit* adalah
45. Misalkan x merupakan bilangan real positif yang memenuhi bagian desimal, bagian bulat, dan bilangan itu sendiri membentuk barisan geometri. Nilai dari x adalah