LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-28

Babak Penyisihan
Tingkat SMP
Minggu, 29 Oktober 2017

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR P.O. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281
lmnas@ugm.ac.id — http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id

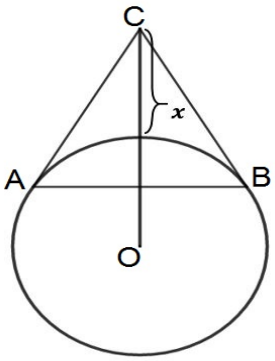
PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA UGM KE-28

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri foto.
3. Setiap peserta diwajibkan membawa tanda peserta berupa Kartu Tanda Peserta LMNas 28 yang sudah disertai foto.
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat diperbolehkan masuk tetapi tidak diberikan waktu tambahan.
6. Bacalah petunjuk pengisian lembar jawaban sebelum Anda mulai mengisi lembar jawaban.
7. Sebelum mengerjakan soal, periksalah kelengkapan naskah soal.
8. Bacalah dan kerjakan soal dengan cermat. Untuk soal pilihan ganda, pilih salah satu jawaban yang Anda anggap benar dengan memberi tanda silang pada huruf jawaban tersebut pada lembar jawab. Untuk soal isian singkat, cukup tuliskan jawaban akhir pada kotak yang tersedia.
9. Untuk soal pilihan ganda, **jawaban benar bernilai +4, jawaban salah bernilai -1, dan kosong bernilai 0**.
10. Untuk soal isian singkat, **jawaban benar bernilai +8, sedangkan jawaban salah atau kosong bernilai 0**.
11. Apabila terdapat nilai yang sama, maka yang diperhatikan pertama kali adalah cacah jawaban benar pada isian singkat kemudian cacah jawaban salah pada pilihan ganda.
12. Tidak diperkenankan menggunakan alat bantu hitung seperti kalkulator, HP, tabel matematika dan alat bantu hitung lainnya selama pengerjaan soal dan harus dinonaktifkan.
13. Dilarang pinjam-meminjam alat tulis, bekerjasama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain, selama lomba berlangsung.
14. Peserta tidak diperkenankan meninggalkan ruang lomba sampai waktu pengerjaan soal usai tanpa seizin pengawas ruang.
15. Jika peserta melakukan pelanggaran, maka pengawas ruang akan memberi peringatan. Jika pelanggaran dilakukan lebih dari 2 (dua) kali, maka peserta akan didiskualifikasi.
16. Untuk soal yang tidak ada ralat selama lomba berlangsung, maka dikerjakan apa adanya.
17. Waktu pengerjaan soal adalah 120 menit.
18. Setelah waktu pengerjaan usai, tinggalkan pekerjaan Anda di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan tidak terlipat atau robek. Naskah soal boleh dibawa pulang.
19. **Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 28 sampai akhir kegiatan**.

20. Peserta yang lolos dari babak penyisihan adalah:
    (a) Satu peserta dengan nilai terbaik pada titik penyisihan yang jumlah pesertanya kurang dari 40 orang.
    (b) Dua peserta dengan nilai terbaik pada titik penyisihan yang jumlah pesertanya lebih dari atau sama dengan 40 orang.
    (c) Peserta selain pada poin a) dan b) dengan nilai terbaik diurutkan secara nasional untuk menggenapi 75 besar.
21. Pengumuman hasil penyisihan dapat dilihat di web LMNAS 28 (http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id) maksimal tanggal 5 November 2017.
22. Keputusan dewan juri tidak dapat diganggu gugat.
23. Untuk peraturan lainnya yang belum jelas dapat ditanyakan kepada panitia pengawas.

1 Pilihan Ganda

1. Diberikan lingkaran berpusat di O dengan jari-jari 28 dan segitiga sama sisi ABC seperti pada gambar berikut.



Nilai dari x adalah ... .

A. 14 B. 28 C. 7 D. $7\sqrt{2}$ E. 21

2. Banyaknya bilangan asli empat digit yang habis dibagi 2, 3, dan 5 dan digit-digitnya merupakan bilangan kubik adalah ... .

A. 6 B. 7 C. 9 D. 8 E. 5

3. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C, dengan a, b, dan c berturut-turut panjang sisi BC, AC, dan AB. Nilai maksimum dari $\dfrac{a+b}{c}$ adalah ... .

A. $\sqrt{2}$ B. 2 C. 4 D. $2\sqrt{2}$ E. 1

4. Di suatu turnamen jumlah peserta laki-laki 2 kali peserta perempuan. Diketahui setiap peserta bertemu tepat sekali dan tidak ada draw. Perbandingan antara banyaknya pertandingan yang dimenangkan oleh perempuan dan laki-laki adalah 7:5. Banyaknya pemain yang ikut dalam turnamen tersebut adalah ... .

A. 9 B. 18 C. 21 D. 12 E. 27

5. Misalkan a adalah suatu bilangan palindrom yang terdiri atas 28 digit. Diketahui a merupakan kelipatan 13 dan semua digitnya selain digit ke-13, 14, 15, dan 16 merupakan angka 1. Misalkan A, B, C, dan D berturut-turut merupakan digit ke-13, 14, 15, dan 16. Nilai minimum yang mungkin dari $A+B+C+D$ adalah ... .

A. 4 B. 5 C. 2 D. 7 E. 10

6. Bilangan asli n dikatakan "ganteng" jika semua faktor positif n yang kurang dari n dikalikan maka hasilnya sama dengan n. Contoh 8 adalah bilangan ganteng. Jumlah 10 bilangan ganteng pertama adalah ... .

A. 180 B. 181 C. 182 D. 165 E. 166

7. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi

$$x + y = 65$$
$$\text{FPB}(x, y) = 13$$

adalah ... . (FPB(a, b) merupakan faktor persekutuan terbesar dari a dan b)

A. 4 B. 2 C. 8 D. 6 E. 3

8. Misalkan A menyatakan banyaknya pasangan bilangan asli $(x_1, x_2, \ldots, x_{47})$ dengan $1 \leq x_i \leq i$ untuk $i = 1, 2, \ldots, 47$ sedemikian hingga $x_1x_2x_3 \ldots x_{47}$ bilangan prima. Misalkan B merupakan jumlahan semua bilangan prima kurang dari 48. Nilai dari $A + B$ adalah ... .

   A. 360 B. 420 C. 600 D. 720 E. 900

9. Untuk merotasi piramida tiga tingkat dari koin sebesar 180° dapat dilakukan dengan cara memindahkan 2 koin. Misalkan a merupakan jumlah minimum koin yang harus dipindahkan untuk merotasi sebesar 180° piramida 99 tingkat. Jumlahan digit dari a adalah ... .

   A. 7 B. 11 C. 9 D. 16 E. 12

10. Misalkan N merupakan bilangan asli terbesar yang memenuhi syarat habis dibagi 36, semua digitnya genap, dan tidak ada dua digit yang sama. Sisa N dibagi 28 adalah ... .

    A. 0 B. 1 C. 16 D. 24 E. 9

11. Misalkan l merupakan banyaknya pasangan bilangan bulat (m, n) sehingga $mn = 28m + n^2$. Jumlahan digit-digit dari l adalah ... .

    A. 7 B. 10 C. 5 D. 3 E. 28

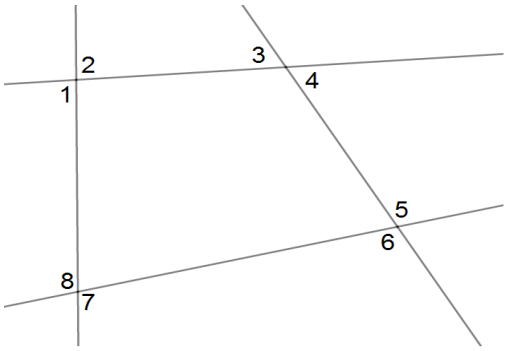
12. Banyaknya pasangan bilangan bulat (x, y) yang memenuhi

$$x(3x + 1) + 2y(y - 2x) - 2 = 0$$

    adalah ... .

    A. 28 B. 1 C. 4 D. 12 E. 6

13. Perhatikan gambar berikut



    Besar sudut $1 + 2 + 3 + \cdots + 8$ adalah ... .

    A. 720 B. 360 C. 1080 D. 600 E. 480

14. Pada sebuah papan catur berukuran 101×101, sebuah bidak kuda diletakkan di pojok kiri bawah. Diketahui kuda hanya dapat melangkah dua petak horizontal lalu satu petak vertikal atau dua petak vertikal lalu satu petak horizontal. Langkah minimum yang diperlukan agar bidak tersebut berada di pojok kanan atas papan adalah ... .

    A. 60 B. 56 C. 65 D. 68 E. 67

15. Bilangan rasional x dikatakan *kawaii* jika x terletak diantara 0 dan 1 serta dapat dinyatakan sebagai $x = \frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan bulat positif yang memenuhi $\text{FPB}(p, q) = 1$ dan $p + q = 2828$. Banyaknya bilangan *kawaii* adalah ... .

    A. 1414 B. 1200 C. 600 D. 2400 E. 1000

16. Dipunyai 10 kotak dan 10 bola yang masing-masing diberi nomor 1 sampai 10. Tiap kotak secara acak akan dimasukkan sebuah bola. Jika peluang tepat 6 kotak berisi bola yang nomornya sesuai dengan nomor kotak tersebut dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q!}$ dengan p dan q merupakan bilangan bulat positif yang memenuhi $\text{FPB}(p, q) = 1$, maka nilai dari $p + q$ adalah ... .

A. 27 B. 28 C. 17 D. 29 E. 16

17. Banyaknya bilangan prima p sehingga bilangan $2p + 1$, $3p + 1$, $4p + 3$, dan $6p + 1$ merupakan bilangan prima adalah ... .

A. Tak hingga B. 5 C. 4 D. 1 E. 0

18. Diketahui

$$S_n = \frac{1^4}{1.3} + \frac{2^4}{3.5} + \cdots + \frac{n^4}{(2n-1)(2n+1)}$$

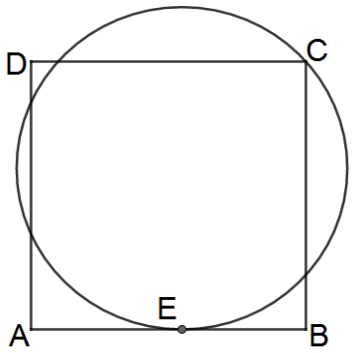
untuk setiap bilangan asli n. Jika $S_{10} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan bulat positif a dan b dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka nilai dari $a - b$ adalah ... .

A. 2017 B. 2004 C. 2000 D. 2010 E. 2015

19. Diberikan $f(x) = (1 - x + x^2 - \cdots + x^{100})(1 + x + \cdots + x^{100})$. Jika $f(x)$ dapat dinyatakan sebagai $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{200}x^n$ dan $A = \{a_i \mid i \text{ bilangan ganjil diantara 0 dan 200 }\}$, maka hasil kali semua elemen A adalah ... .

A. 1 B. -1 C. 100 D. 0 E. -100

20. Perhatikan gambar berikut



$ABCD$ adalah persegi dengan panjang sisi 2 cm dan titik E berada di tengah sisi AB. Jari-jari lingkaran pada gambar dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan bulat positif yang memenuhi $\text{FPB}(p, q) = 1$. Nilai dari $p + q$ adalah ... .

A. 8 B. 10 C. 6 D. 9 E. 7

21. Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ untuk setiap bilangan asli x. Jika $\sum_{x=2}^{2018} f(x) = a + \frac{b}{c}$ dengan a, b, dan c bilangan bulat positif yang memenuhi $b < c$ dan $\text{FPB}(b, c) = 1$, maka nilai dari $a + b - c$ adalah ... .

A. 2017 B. 2015 C. 2019 D. 2016 E. 2020

22. Pasangan bilangan bulat non negatif (a, b, c, d) dikatakan *loli* jika memenuhi $ac+bd+ad+bc = 2017$. Banyaknya pasangan bilangan *loli* adalah ... .

A. 4036 B. 8072 C. 2018 D. 2017 E. 4034

23. Banyaknya bilangan asli $n < 2017$ sedemikian hingga

$$1 + n + \frac{n^2}{2} + \cdots + \frac{n^6}{6!}$$

merupakan bilangan asli adalah ... .

A. 16 B. 17 C. 133 D. 134 E. 15

24. Banyaknya bilangan asli n dengan $1 \leq n \leq 2017$ sehingga $n^5 - n^4 - 4n^3 + 4n^2 + 4n - 4$ merupakan bilangan kuadrat adalah ... .

A. 45 B. 47 C. 49 D. 28 E. 27

25. Di suatu ruangan terdapat 48 anak yang duduk melingkar, sebagian berbaju hijau dan sebagian lagi berbaju putih. Himpunan A merupakan himpunan yang berisi bilangan-bilangan k sehingga jika terdapat k anak berbaju putih dapat dipastikan minimal ada 6 anak berbaju hijau yang duduk saling bersebelahan. Anggota terbesar dari A adalah ... .

A. 6 B. 10 C. 7 D. 9 E. 8

26. Perhatikan tabel berisi angka di bawah

10		A
	B	9
C	3	
11	D	17
	20	E

Pada petak tersebut akan diisi 9 angka yang dipilih dari himpunan {4, 5, 6, 7, 8, 12, 13, 16, 18, 19} sehingga jumlah bilangan-bilangan di masing-masing kolomnya sama serta jumlah bilangan-bilangan di masing-masing baris juga sama. Nilai dari $A + B + C + D + E$ adalah ... .

A. 20 B. 28 C. 36 D. 18 E. 32

27. Dalam sebuah segitiga sama kaki ABC yang siku-siku di A dibuat persegi $PQRS$ sedemikian hingga titik P pada sisi AB, titik Q pada AC, sedangkan titik R dan S pada sisi miring BC. Jika luas ABC adalah 279, maka luas $PQRS$ adalah ... .

A. 155 B. 186 C. 217 D. 124 E. 93

28. Emilia mempunyai 130 ons cat biru, 164 ons cat merah, dan 188 ons cat putih. Ketiga cat tersebut digunakan untuk mengecat 4 sisi dinding dengan luas permukaan yang sama masing-masing dengan warna biru, merah, putih, dan pink. Warna pink diperoleh dari campuran antara cat merah dan putih (tidak harus sama banyak). Jika diketahui pada akhir pengecatan yang tersisa adalah warna biru,putih, dan merah dalam jumlah yang sama, total cat yang tersisa adalah ... ons.

A. 152 B. 114 C. 113 D. 155 E. 145

29. Diberikan bilangan real a, b, dan c yang memenuhi $abc = 1$. Nilai dari

$$\frac{1}{1 + a + \frac{1}{b}} + \frac{1}{1 + b + \frac{1}{c}} + \frac{1}{1 + c + \frac{1}{a}}$$

adalah ... .

A. $\frac{1}{ab}$ B. 1 C. $\frac{1}{ac}$ D. $\frac{1}{bc}$ E. 2

30. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan AB sejajar CD dan panjang sisi AB dan CD berturut adalah 84 cm dan 25 cm. Diketahui trapesium $ABCD$ memiliki lingkaran dalam yang menyinggung keempat sisinya. Keliling trapesium $ABCD$ adalah ... .

A. 204 B. 224 C. 198 D. 218 E. 234

31. Diketahui A merupakan bilangan bulat positif sehingga untuk setiap bilangan bulat k dengan $1 \leq k \leq 7$ berlaku $A + k$ habis dibagi $k + 1$. Jumlahan digit dari A adalah ... .

A. 10 B. 11 C. 13 D. 12 E. 14

32. Diberikan bilangan real x dan y yang memenuhi

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} + \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 2$$

dan

$$\frac{x^8 + y^8}{x^8 - y^8} + \frac{x^8 - y^8}{x^8 + y^8} = k.$$

Nilai dari k adalah ... .

A. 0 B. 1 C. -1 D. 2 E. 4

33. Diberikan fungsi $f(n) = \underbrace{111\ldots1}_{n}\underbrace{222\ldots2}_{n+1}5$. Banyaknya bilangan bulat k dengan $1 \leq k \leq 28$ sehingga $f(k)$ merupakan bilangan kuadrat adalah ... .

A. 27 B. 28 C. 14 D. 0 E. 1

34. Didefinisikan himpunan $S_n = \{x \mid 1000n \leq x \leq 1000(n + 1)\}$. Banyaknya himpunan $S_0, S_1, \ldots, S_{125}$ yang tidak memuat bilangan kubik adalah ... .

A. 87 B. 88 C. 86 D. 78 E. 80

35. Diberikan bilangan prima berurutan a, b, dan c. Diketahui $1 + a + b + c$ merupakan bilangan prima . Nilai dari abc adalah ... .

A. 105 B. 70 C. 385 D. 1001 E. 30

36. Banyaknya pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi

$$1 + 2016x + 2018y = xy$$

adalah ... .

A. 2 B. 1 C. 0 D. 4 E. 3

37. Banyaknya bilangan real x yang memenuhi

$$3^x + x = \frac{x}{4^x}$$

adalah ... .

A. Tak hingga B. 0 C. 1 D. 4 E. 2

38. Misalkan k merupakan bilangan bulat positif terkecil yang memenuhi $\sqrt{\frac{k}{2}}$, $\sqrt[3]{\frac{k}{3}}$, dan $\sqrt[5]{\frac{k}{5}}$ ketiganya merupakan bilangan bulat. Jika k dapat dinyatakan sebagai $k = p^a q^b r^c$ dengan p, q, dan r bilangan prima yang memenuhi $p < q < r$, nilai dari $pqr + abc$ adalah ... .

A. 900 B. 720 C. 930 D. 810 E. 750

39. Bentuk sederhana dari
$$\sqrt[3]{3\sqrt{21}+8}-\sqrt[3]{3\sqrt{21}-8}$$
adalah ... .

A. $\sqrt[3]{28}$ B. $3\sqrt[6]{28}$ C. 1 D. -1 E. $3\sqrt[3]{28}$

40. Diketahui a merupakan bilangan bulat positif terkecil yang mempunyai tepat 30 faktor positif. Jumlahan digit dari a adalah ... .

A. 7 B. 9 C. 8 D. 10 E. 12

2 Isian Singkat

41. Nilai dari
$$\left\{\frac{1.2.4+2.4.8+\cdots+n.2n.4n}{1.3.9+2.6.18+\cdots+n.3n.9n}\right\}^{\frac{1}{3}}$$
adalah ... .

42. Diberikan segilima $ABCDE$ dengan $AB = AE = CD = 2$, $\angle ABC = \angle DEA = 90^\circ$ dan $BC + DE = 2$. Luas $ABCDE$ adalah ... .

43. Alzim mengambil lima bilangan dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 7\}$ dan mengatakan kepada Maimai hasil perkaliannya. Alzim lalu bertanya apakah Maimai bisa mengetahui hasil penjumlahan kelima bilangan tersebut merupakan bilangan ganjil/genap. Maimai berkata dirinya tidak dapat memastikannya. Hasil kali bilangan yang diambil Alzim adalah ... .

44. Chitoge ingin menyumbangkan makanan dalam kunjungannya ke panti asuhan seharga \$100000. Saat memilih makanan di toko ada 3 jenis makanan yaitu kue mutiara seharga \$1000, lumpia seharga \$3000, dan roti sosis seharga \$5000. Jika chitoge harus membeli minimal 1 masing-masing jenis makanan, banyaknya cara chitoge membeli makanan tersebut adalah ... .

45. Banyaknya bilangan rasional x sehingga $\sqrt{2017+x}$ dan $\sqrt{2018+x}$ merupakan bilangan rasional adalah ... .