



LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-29 UGM

“MATEMATIKA UNTUK GENERASI PENERUS BANGSA”

BABAK PENYISIHAN

TINGKAT SMA

MINGGU, 28 OKTOBER 2018

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR PO. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281
lmnas@ugm.ac.id – <http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>

PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA UGM KE-29

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Peserta wajib membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri foto.
3. Peserta wajib membawa Kartu Tanda Peserta LMNAS 29 yang diunduh dari akun masing-masing peserta pada web LMNAS 29 (<http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>).
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat masuk dapat mengikuti tes setelah mendapatkan izin dari panitia/pengawas dengan tidak ada tambahan waktu.
6. Peserta menerima satu set soal, lembar jawaban, dan kertas buram.
7. Peserta memeriksa kelengkapan halaman lembar soal dan mengerjakan tes sesuai dengan waktu yang telah ditentukan.
8. Bacalah petunjuk pengerjaan soal dan petunjuk pengisian lembar jawaban.
9. Peserta mengisi lembar jawaban dengan menggunakan **bolpoin hitam**. Dilarang menggunakan penghapus cair pada lembar jawaban.
10. Peserta menuliskan isian nama peserta, asal sekolah, dan nomor peserta pada lembar jawaban.
11. Peserta menandatangani daftar hadir yang telah disediakan.
12. Tes babak penyisihan LMNAS 29 terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 25 pilihan ganda, jawaban **benar bernilai +4, salah bernilai -1, dan kosong bernilai 0. Bagian Kedua terdiri dari 10 soal isian singkat, jawaban benar bernilai +10, sedangkan salah atau kosong bernilai 0.**
13. Waktu tes adalah 120 menit. Selama waktu itu, Anda boleh menyelesaikan soal mana pun sesuka Anda.
14. Apabila terdapat nilai yang sama maka yang diperhatikan pertama kali adalah cacah jawaban benar pada isian singkat, kemudian cacah jawaban salah pada pilihan ganda.
15. Peserta dilarang menggunakan buku catatan, kalkulator, atau alat bantu lainnya.
16. Peserta dilarang saling meminjam alat tulis, bekerja sama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain saat tes berlangsung.
17. Peserta dilarang berbicara atau melakukan hal-hal lain yang dapat mengganggu peserta lain.
18. Peserta tidak boleh meninggalkan ruangan sampai batas akhir waktu tes. Jika ada peserta yang hendak ke toilet pada saat tes harus seizin dan/atau diantar oleh pengawas.
19. Jika peserta melakukan pelanggaran, maka pengawas akan memberi peringatan. Jika pelanggaran dilakukan lebih dari 2 (dua) kali, maka peserta akan didiskualifikasi.
20. Peserta dapat bertanya pada pengawas dengan mengangkat tangan jika ada hal-hal yang tidak jelas. Dilarang menyampaikan pertanyaan yang mengarah pada jawaban butir soal.

21. Setelah tes selesai, tinggalkan lembar jawaban di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan bersih dan tidak terlipat atau robek, sedangkan naskah soal boleh dibawa pulang.
22. Setelah tes selesai, tinggalkan lembar jawaban di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan bersih dan tidak terlipat atau robek, sedangkan naskah soal boleh dibawa pulang.
23. **Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 29 sampai akhir kegiatan.**
24. Pengumuman hasil penyisihan dapat dilihat di web LMNAS 29 (<http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>).
25. **Keputusan dewan juri tidak dapat diganggu gugat.**

1 Pilihan Ganda

1. Diketahui x adalah bilangan real negatif yang memenuhi $x^2 + \frac{1}{x^2} = 47$. Nilai dari $x^3 + \frac{1}{x^3}$ adalah ...

A. -332 B. -252 C. -7 D. 7 E. 322

2. Diberikan bilangan bulat a dan b yang memenuhi

$$\begin{aligned} 3^a &= 81^{b+2} \\ 125^b &= 5^{a-3} \end{aligned}$$

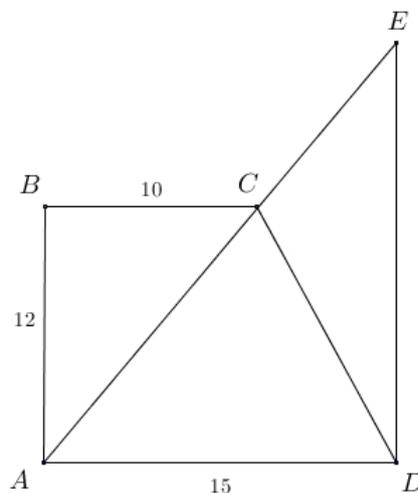
Nilai dari ab adalah ...

A. 10 B. 29 C. 60 D. 64 E. 2018

3. Terdapat 8 kursi berjejer yang akan ditempati 3 siswi dan 5 siswa. Budi merupakan salah satu di antara 5 siswa tersebut. Apabila Budi harus diapit oleh 2 wanita, maka banyak cara mereka duduk adalah ...

A. 720 B. 1440 C. 2160 D. 3600 E. 4320

4. Segiempat $ABCD$ adalah trapesium dengan sisi sejajar BC dan AD serta AB tegak lurus AD . Diketahui bahwa $BC = 10$, $AD = 15$, $AB = 12$. Titik E adalah titik potong garis AC dengan garis melalui D tegak lurus AD . Luas segitiga CDE adalah ...



A. 45 B. 60 C. 75 D. 90 E. 105

5. Misalkan $N = (1!)^3 + (2!)^3 + \dots + (2018!)^3$. Jika tiga digit terakhir N adalah \overline{abc} , maka nilai $a + b + c$ adalah ...

A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. 13

6. Diberikan suatu polinomial $p(x)$ sehingga

$$p(p(x)) = x^4 + 4x^3 + 8x^2 + 8x + 4$$

nilai dari

$$\sum_{i=1}^{29} p(i)$$

adalah ...

- A. 9454 B. 10434 C. 16824 D. 20184 E. 25254

7. Diberikan segitiga ABC siku-siku di C . Titik D terletak pada sisi AC sedemikian hingga garis BD membagi dua sudut ABC sama besar. Diketahui $AB = 3$ dan luas segitiga ABD adalah 9. Panjang sisi CD adalah ...

- A. 4 B. 6 C. 7 D. 8 E. 9

8. Diketahui p adalah bilangan lima digit yang habis dibagi 5. Jika digit pertama dan digit terakhir sama serta penjumlahan angka-angka habis dibagi 5, maka banyaknya kemungkinan nilai p yang memenuhi ada ...

- A. 100 B. 150 C. 175 D. 200 E. 225

9. Diberikan segitiga ABC dengan panjang sisi $AC = 9$, $BC = 40$, $AB = 41$. Dibentuk lingkaran yang melewati titik tengah sisi AC , BC dan titik C . Jari-jari lingkaran yang terbentuk adalah ...

- A. $10\frac{1}{4}$ B. 10 C. $10\frac{1}{2}$ D. 11 E. $11\frac{1}{2}$

10. Diketahui N adalah bilangan asli tiga digit yang satuannya bukan 0. Sedangkan M adalah bilangan asli tiga digit yang diperoleh dengan menukar satuan dan ratusan dari N . Diketahui jumlah dari M dan N adalah 483. Jumlah digit-digit dari M adalah ...

- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12 E. 13

11. Jika $p(x), q(x)$ adalah polinom berderajat 3 yang memenuhi $p(0) = q(0), p(1) = q(2), p(2) = q(4), p(3) = q(6) + 30$. Tentukan nilai $p(4) - q(8)$!

- A. 120 B. 160 C. 200 D. 240 E. 300

12. Diketahui p, q, r, s adalah bilangan-bilangan tak nol. Bilangan r dan s adalah solusi persamaan $x^2 + px + q = 0$, serta bilangan p dan q adalah solusi persamaan $x^2 + rx + s = 0$. Nilai $p + q + r + s$ adalah ...

- A. -4 B. -3 C. -2 D. -1 E. 0

13. Suatu klub badminton mempunyai tidak lebih dari 20 orang yang terdiri dari n pemain kidal dan $2n$ pemain tidak kidal. Dalam suatu uji coba pertandingan, setiap pemain bertemu dengan pemain yang lain tepat satu kali, tidak ada pertandingan seri dan rasio banyak pertandingan yang dimenangkan oleh pemain tidak kidal dan pemain kidal adalah 3 : 4. Nilai n

adalah ...

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5 E. 6

14. Sebuah lingkaran berpusat di O dan berjari-jari 25. Talibusur AB yang panjangnya 30 memotong talibusur CD yang panjangnya 14 di titik P . Jika jarak antar titik tengah kedua talibusur tersebut sama dengan 12, maka panjang OP adalah ...

- A. $\frac{20\sqrt{14}}{7}$ B. 6 C. $\frac{45\sqrt{14}}{7}$ D. $\frac{46\sqrt{14}}{7}$ E. $7\sqrt{14}$

15. Ricky membuat sebuah himpunan beranggotakan lima bilangan bulat, misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dengan $a \leq b \leq c \leq d \leq e$. Ricky mendaftarkan semua himpunan bagian dari A yang mempunyai anggota sebanyak tiga. Lalu untuk setiap himpunan yang Ricky bentuk, dia menjumlahkan semua bilangan yang ada pada himpunan bagian tersebut. Jika hasil yang diperoleh Ricky adalah 1, 12, 40, 51, 0, 61, 60, 49, 52, 100. Nilai dari c adalah ...

- A. 28 B. 29 C. 2017 D. 2018 E. 2019

16. Diketahui perkalian lima bilangan bulat positif berurutan sama dengan 36 kali penjumlahan kelima bilangan tersebut. Jika B dan K berturut-turut menyatakan bilangan terbesar dan bilangan terkecil dari kelima bilangan tersebut, nilai dari $K^2 - B^2$ adalah ...

- A. 21 B. 30 C. 32 D. 40 E. 41

17. Andi mempunyai tujuh potong kertas. Dia mengambil beberapa potong kertas dari potongan kertas itu dan masing-masing dipotong menjadi tujuh potongan. Selanjutnya dia mengambil beberapa potongan kertas itu dan masing-masing dipotong menjadi tujuh potongan. Hal ini dilakukan terus menerus. Berapa potongan kertas yang mungkin Andi dapatkan ?

- A. 2010 B. 2012 C. 2013 D. 2017 E. 2018

18. Bentuk sederhana dari

$$\frac{\sqrt{10 + \sqrt{1}} + \sqrt{10 + \sqrt{2}} + \dots + \sqrt{10 + \sqrt{99}}}{\sqrt{10 - \sqrt{1}} + \sqrt{10 - \sqrt{2}} + \dots + \sqrt{10 - \sqrt{99}}}$$

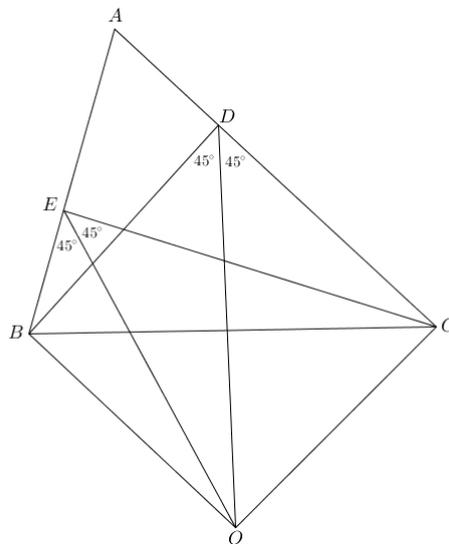
adalah ...

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{10}$ D. $1 + \sqrt{2}$ E. $1 + \sqrt{10}$

19. Banyaknya pasangan bilangan asli (m, n) yang memenuhi $m^2 + 8 = 29^n$ adalah ...

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3 E. 4

20. Diberikan segitiga ABC dengan garis tinggi BD dan CE . Garis bagi dalam $\angle BEC$ dan $\angle BDC$ berpotongan pada titik O . Apabila $AB = 4\sqrt{26}$, $BC = 24$ dan $CA = 20\sqrt{2}$, maka panjang AO adalah ...



- A. $5\sqrt{17}$ B. $6\sqrt{17}$ C. $7\sqrt{17}$ D. $8\sqrt{17}$ E. $9\sqrt{17}$

21. Misalkan $P(x)$ adalah polinomial dengan koefisien bulat dan memenuhi $P(2) = -5, P(4) = 7$ dan $P(6) = 27$. Diketahui pula bahwa persamaan $P(n) = n^2 + 6$ mempunyai 4 solusi bilangan bulat n_1, n_2, n_3, n_4 . Nilai $n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ adalah ...

- A. 16 B. 18 C. 20 D. 17 E. 15

22. Diketahui x, y adalah bilangan real yang memenuhi

$$\sqrt{x^2 + 2y + 4} + \sqrt{x^2 + x - y + 5} = \sqrt{x^2 + 2x + 3} + \sqrt{x^2 + x + 3y + 2}.$$

Nilai dari $x + y$ adalah ...

- A. 0 B. 2 C. 4 D. 2016 E. 2018

23. Sebuah bilangan dikatakan "santri" jika jumlah digit-digitnya adalah 11. Misalkan a_n menyatakan bilangan santri ke- n . Diketahui $a_{2n} = 2018$ untuk suatu bilangan asli n dan p merupakan bilangan prima terbesar yang habis membagi $1 + a_{5n}$. Jumlah digit-digit p adalah ...

- A. 5 B. 7 C. 11 D. 19 E. 20

24. Ketiga titik sudut segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi $\sqrt{7}$ terletak pada suatu lingkaran. Perpanjang AB ke titik D dengan titik B terletak diantara A dan D sehingga $AD = 12$ dan perpanjang AC ke titik E dengan titik C terletak diantara A dan E sehingga $AE = 13$. Melalui D dibuat garis l_1 sejajar AE dan melalui E dibuat garis l_2 sejajar AD . Kedua garis ini berpotongan di titik F . Titik G yang berbeda dengan A terletak pada lingkaran sehingga A, G , dan F terletak pada satu garis lurus. Misalkan $[BCG] = \frac{P\sqrt{Q}}{R}$ dimana Q tidak habis dibagi oleh kuadrat bilangan apapun kecuali 1, serta P dan R merupakan bilangan asli yang relatif prima. Nilai $R - P - Q$ adalah ...

- A. 19 B. 21 C. 23 D. 25 E. 27

25. Untuk $0 \leq \theta \leq \pi$, dimisalkan

$$P = \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{4} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 3\theta + \frac{1}{16} \cos 4\theta + \dots$$

$$Q = \frac{1}{2} \sin \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta + \frac{1}{8} \sin 3\theta + \frac{1}{16} \sin 4\theta + \dots$$

Jika $P = -\frac{1}{11}$, maka nilai Q sama dengan ...

A. $\frac{1}{11}\sqrt{2}$

B. $\frac{2}{11}\sqrt{2}$

C. $\frac{3}{11}\sqrt{2}$

D. $\frac{4}{11}\sqrt{2}$

E. $\frac{5}{11}\sqrt{2}$

2 Isian

1. Misalkan $f(x)$ adalah polinom berderajat maksimal 3. Jika

$$|f(1)| = |f(2)| = |f(3)| = |f(4)| = |f(5)| = |f(6)| = |f(7)| = 12$$

tentukan nilai $|f(0)|^2 + |f(0)| + 12$.

2. Sebuah papan 4×4 dibagi menjadi 16 persegi putih yang identik. Setiap langkah, sebuah persegi beserta semua persegi yang berbagi sisi dengan persegi tersebut diubah warnanya (dari hitam ke putih dan dari putih ke hitam). Setelah n langkah, semua persegi tersebut menjadi berwarna hitam. Tentukan nilai n terkecil yang mungkin.

3. Diberikan segitiga PQR dengan panjang sisi $QR = 11$, $PR = 12$ dan $PQ = 7$. Tentukan nilai dari

$$(\sin P + \sin Q + \sin R) \left(\cot \frac{P}{2} + \cot \frac{Q}{2} + \cot \frac{R}{2} \right)$$

4. Barisan bilangan memenuhi $a_{n+3} = a_{n+2} + a_{n+1} + a_n$ dengan $n \in \mathbb{N}$ dan $n \geq 1$. Serta diketahui $a_1 = -1$, $a_2 = 29$, dan $a_3 = 2$. Jika $a_{29} = 19121949$, $a_{30} = 17081998$, dan $a_{31} = 3102000$ maka $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{29}$ dibagi 100 akan memiliki sisa ...

5. Diberikan bilangan real b dan c dan polinomial $P(x) = x^2 + bx + c$. Diketahui $P(P(1)) = P(P(2)) = 0$ dan $P(1) \neq P(2)$. Nilai dari $P(0)$ adalah ...

6. Misalkan a, b, c bilangan real positif yang memenuhi $a + b + c = 1$. Nilai minimum dari $\frac{a+b}{abc}$ adalah ...

7. Pada segitiga ASN , diketahui $SN = 5$, $AS = 12$, dan $AN = 13$ dengan titik L dan M berturut-turut terletak pada AS dan AN sedemikian sehingga garis LM membagi segitiga ASN menjadi dua bagian yang sama luas. Tentukan panjang minimum LM

8. Diberikan fungsi

$$f(x) = \sqrt{x \sqrt[3]{x^2 \sqrt[4]{x^3 \sqrt[5]{x^4} \dots}}}$$

Tentukan nilai dari $f(1)^3 + f(2)^3 + \dots + f(10)^3$

9. Nilai n terkecil sehingga nilai dari n bilangan asli pertama yang secara acak diberi warna merah atau putih selalu terdapat tiga bilangan diantaranya yang berwarna sama dan membentuk barisan aritmetika adalah ...
10. Bilangan asli terkecil k sehingga $(2014k+1)(2018k+1)$ merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ...