



LOMBA MATEMATIKA NASIONAL KE-30 UGM

"MENGEMBANGKAN GENERASI MATEMATIKA BERINTEGRITAS
SEBAGAI HARAPAN BANGSA"

BABAK PENYISIHAN

TINGKAT SMA

MINGGU, 27 OKTOBER 2019

HIMPUNAN MAHASISWA MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS GADJAH MADA
SEKIP UTARA UNIT III BULAKSUMUR PO. BOX BLS 21 YOGYAKARTA 55281
Imnas@ugm.ac.id – <http://Imnas.fmipa.ugm.ac.id>

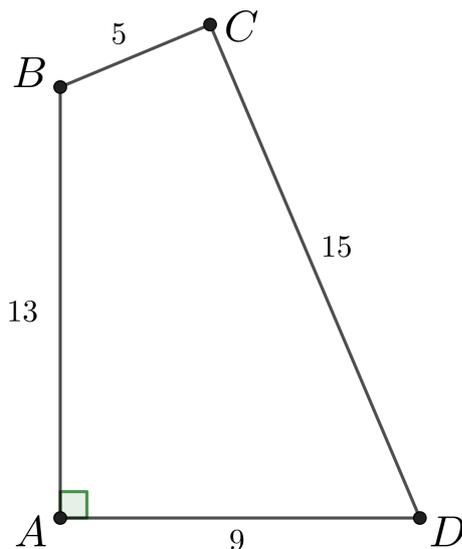
PERATURAN BABAK PENYISIHAN LOMBA MATEMATIKA NASIONAL UGM KE-30

1. Peserta wajib mengenakan seragam sekolah dan bersepatu.
2. Peserta wajib membawa Kartu Pelajar atau Surat Keterangan Siswa Sekolah yang dilampiri foto.
3. Peserta wajib membawa Kartu Tanda Peserta LMNas 30 yang diunduh dari akun masing-masing peserta pada web LMNas 30 (<http://lmnas.fmipa.ugm.ac.id>).
4. Peserta tidak boleh diwakilkan atau digantikan.
5. Peserta yang datang terlambat masuk dapat mengikuti tes setelah mendapatkan izin dari panitia/pengawas dengan tidak ada tambahan waktu.
6. Peserta memeriksa kelengkapan halaman lembar soal dan mengerjakan tes sesuai dengan waktu yang telah ditentukan. Apabila lembar soal tidak lengkap atau terdapat kecacatan, peserta dapat melapor ke pengawas.
7. Bacalah petunjuk pengerjaan soal dan petunjuk pengisian lembar jawaban.
8. Peserta mengisi lembar jawaban dengan menggunakan **bolpoin hitam**. Dilarang menggunakan penghapus cair pada lembar jawaban.
9. Peserta menuliskan isian nama peserta, asal sekolah, NISN, dan nomor peserta pada lembar jawaban.
10. Peserta menandatangani daftar hadir yang telah disediakan.
11. Tes babak penyisihan LMNas 30 terdiri dari dua bagian. Bagian Pertama terdiri dari 25 pilihan ganda, jawaban **benar bernilai +4, salah bernilai -1, dan kosong bernilai 0**. Bagian Kedua terdiri dari 5 soal isian singkat, **jawaban benar bernilai +10, sedangkan salah atau kosong bernilai 0. Tulis jawaban akhir saja tanpa penjelasan pada lembar jawaban**.
12. 2 di antara 25 soal pilihan ganda merupakan soal emas. Nomor soal emas dirahasiakan oleh panitia. Soal emas akan digunakan sebagai pertimbangan ketika terdapat peserta dengan nilai yang sama pada batas kelolosan.
13. Waktu tes adalah 120 menit.
14. Apabila terdapat nilai yang sama pada batas kelolosan, maka yang diperhatikan pertama kali adalah banyak jawaban benar pada isian singkat, kemudian banyak soal emas yang dijawab dengan benar, kemudian banyak jawaban salah pada pilihan ganda. Jika nilai masih tetap sama, maka akan diloloskan ke babak 75 besar.
15. Peserta dilarang menggunakan buku catatan, kalkulator, atau alat bantu lainnya.
16. Peserta dilarang meminjam alat tulis, bekerja sama, memberikan jawaban, atau melihat jawaban peserta lain saat tes berlangsung.
17. Peserta dilarang berbicara atau melakukan hal-hal lain yang dapat mengganggu peserta lain.
18. Peserta tidak boleh meninggalkan ruangan sampai batas akhir waktu tes. Jika ada peserta yang hendak ke toilet pada saat tes harus seizin dan/atau diantar oleh pengawas.
19. Peserta yang melakukan pelanggaran lebih dari 2 (dua) kali, akan didiskualifikasi. Diskualifikasi diberitahukan secara langsung oleh pengawas ketika di ruangan.

20. Peserta dapat bertanya pada pengawas dengan mengangkat tangan jika ada hal-hal yang tidak jelas. Selama tidak ada ralat/anulir dari panitia, peserta tidak diperbolehkan menanyakan hal-hal yang berhubungan dengan soal pada pengawas.
21. Setelah tes selesai, tinggalkan lembar jawaban di meja/kursi tempat Anda mengerjakan soal dalam keadaan bersih dan tidak terlipat atau robek, sedangkan naskah soal boleh dibawa pulang.
22. **Sertifikat peserta hanya diberikan kepada peserta yang datang dan mengikuti babak penyisihan LMNAS 30 sampai akhir kegiatan.**
23. Kunci jawaban dan pengumuman hasil penyisihan dapat dilihat di halaman **lmnas.fmipa.ugm.ac.id**.
24. Peserta dapat mengajukan sanggahan terhadap soal maupun kunci jawaban babak penyisihan yang dinilai tidak benar dengan penjelasan yang memadai serta mengikuti format sanggahan yang telah tersedia di web. Pengajuan sanggahan dapat dikirimkan kepada panitia selambat-lambatnya 1 hari setelah akhir babak penyisihan melalui email : sanggahanlmnas@gmail.com.

1 Pilihan Ganda

- Dua bilangan dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Peluang hasil kali kedua bilangan tersebut kelipatan 5 adalah ...
 - $\frac{1}{5}$
 - $\frac{6}{29}$
 - $\frac{1}{6}$
 - $\frac{1}{29}$
 - $\frac{1}{30}$
- Diantara bilangan-bilangan 150, 151, 152, 153 dan 154, banyaknya bilangan yang dapat dinyatakan sebagai jumlahan dua bilangan kuadrat sempurna adalah ...
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - 5
- Perhatikan gambar berikut. Jika $\angle BAD = 90^\circ$, maka luas segiempat $ABCD$ adalah ...



- 124
 - 150
 - 200
 - 96
 - 120
- Untuk bilangan real a dan b , didefinisikan $a * b = a + b + 1$. Jika $\lfloor x \rfloor$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil dari atau sama dengan bilangan real x , maka nilai dari $\lfloor 2 * \sqrt{3} \rfloor$ adalah ...
 - 0
 - 1
 - 2
 - 3
 - 4
 - Banyaknya kata yang dapat dibentuk dari huruf-huruf J, O, G, J, A dimana huruf pertamanya harus huruf mati (konsonan) adalah ...
 - 12
 - 24
 - 36
 - 48
 - 50
 - Misalkan $k = 3^{10} + 10^3$. Digit terakhir dari 3^k adalah ...
 - 1
 - 3
 - 5
 - 7
 - 9
 - Nilai dari

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{2019}{1009^2 \cdot 1010^2}$$
 adalah ...
 - $\frac{1008 \cdot 1009}{1010^2}$
 - $\frac{1008 \cdot 1010}{1009^2}$
 - $\frac{1009}{1010}$
 - $\frac{1010 \cdot 1011}{1009^2}$
 - $\frac{1009 \cdot 1011}{1010^2}$
 - Titik P dan Q terletak pada lingkaran ω yang berpusat di O dengan jari-jari $10\sqrt{7}$. Titik R merupakan pencerminan titik P terhadap Q . Diketahui bahwa jarak dari titik R ke titik O adalah 30. Panjang talibusur PQ adalah ...
 - 10
 - 9
 - 8
 - 7
 - 6

9. Terdapat M bola di dalam sebuah keranjang dan satu di antara bola-bola tersebut berwarna putih dan sisanya berwarna merah. Terdapat pula n orang yang akan mengantri mengambil satu bola dalam keranjang tersebut tanpa dikembalikan dan $n < M$. Peluang bola putih tidak diambil adalah ...

- a. $\frac{n}{M}$ b. $1 - \frac{n}{M}$ c. $\frac{1}{M}$ d. $\frac{1}{n}$ e. $\frac{M-1}{M}$

10. Jika $\frac{\cos 2\alpha - \cos 2\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = -\frac{2}{3}$, maka nilai $\sin(\alpha - \beta)$ adalah ...

- a. 1 b. 0 c. $\frac{1}{3}$ d. $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ e. $\frac{1}{5}\sqrt{5}$

11. Misalkan

$$f(x) = \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x}$$

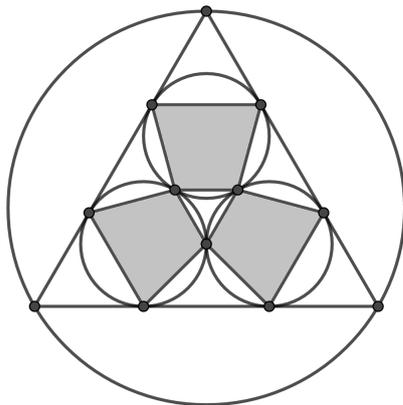
Nilai dari

$$\frac{f(1^\circ) + f(2^\circ) + f(3^\circ) + \dots + f(20^\circ)}{f(181^\circ) + f(182^\circ) + \dots + f(200^\circ)}$$

adalah ...

- a. 1 b. 0 c. -1 d. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e. $\sqrt{2}$

12. Apabila jari-jari lingkaran besar adalah R dan segitiga yang berada di dalam lingkaran besar merupakan segitiga sama sisi, maka luas daerah yang diarsir adalah ...



- a. $\frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{16}R^2$ b. $\frac{9}{16}R^2$ c. $\frac{1}{2}R^2$ d. $\frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}{\sqrt{3} + 1}R^2$ e. $\frac{1}{4}R^2$

13. Digit terakhir dari jumlahan

$$\sum_{k=1}^{2019} 3^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

adalah ...

- a. 1 b. 3 c. 5 d. 7 e. 9

14. Dua bilangan A dan B dipilih dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$. Peluang $|A - B| > 2$ adalah

- a. $\frac{199}{225}$ b. $\frac{21}{25}$ c. $\frac{17}{30}$ d. $\frac{757}{900}$ e. $\frac{811}{900}$

15. Misalkan $\tau(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif dari bilangan asli n . Jumlah semua bilangan asli n yang memenuhi persamaan

$$\tau(n) = 3 \text{ dan } \tau(n + 152) = 9$$

adalah ...

- a. 1658 b. 54 c. 1369 d. 529 e. 900

16. Barisan (a_n) memenuhi

$$\sum_{k=1}^n a_k = \log \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{3}$$

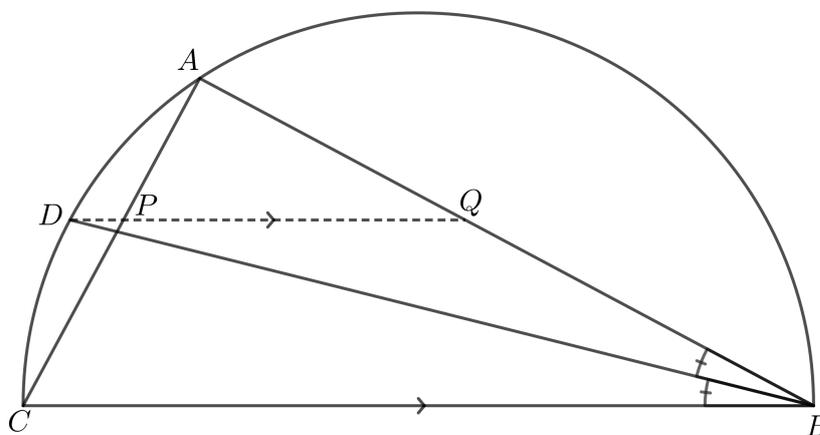
untuk setiap bilangan asli n . Jika

$$\sum_{k=1}^{10} a_{3k} = p$$

maka nilai 10^p adalah

- a. 8 b. 9 c. 10 d. 11 e. 12

17. Diberikan setengah lingkaran ω berdiameter AB dengan panjang 30. Titik C terletak pada keliling ω sedemikian hingga $\tan \angle ABC = \frac{3}{4}$. Garis bagi $\angle ABC$ memotong ω di titik D yang berbeda dengan B . Sebuah garis melalui D dan sejajar AB memotong AC dan BC di P dan Q berturut-turut. Panjang PQ adalah ...



- a. $2\sqrt{10}$ b. 9 c. $\frac{45}{4}$ d. 10 e. $\frac{21}{2}$

18. Jumlah dari semua bilangan bulat n sedemikian hingga $4n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + 1$ merupakan bilangan kuadrat sempurna adalah ...

- a. 3 b. -1 c. 2 d. 0 e. 4

19. Nilai dari jumlahan

$$\sum_{k=1}^{673} \frac{k}{2019^k} \binom{673}{k} = \frac{1}{2019} \binom{673}{1} + \frac{2}{2019^2} \binom{673}{2} + \frac{3}{2019^3} \binom{673}{3} + \dots + \frac{673}{2019^{673}} \binom{673}{673}$$

adalah ...

- a. $\frac{1}{3} \left(\frac{2020}{2019} \right)^{673}$ b. $\frac{1}{3} \left(\frac{2020}{2019} \right)^{672}$ c. $\frac{1}{3} \left(\frac{2019}{2018} \right)^{672}$ d. $\left(\frac{2020}{2019} \right)^{672}$ e. $\left(\frac{2020}{2019} \right)^{673}$

20. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Jika terdapat titik P terletak di dalam segitiga ABC sedemikian hingga $PC = AB, \angle PBA = 14^\circ$ dan $\angle PCA = 28^\circ$, maka $\angle BAC = \dots$
- a. 134° b. 122° c. 92° d. 84° e. 76°

21. Nefa memiliki 2 dadu 6-sisi yang tidak seimbang, sebab peluang munculnya mata dadu k proporsional (berbanding lurus) terhadap nilai k . Fadlan menantang Nefa untuk bermain dengan dadu tersebut. Nefa akan melempar 2 dadu tersebut secara terus-menerus sampai diperoleh jumlah kedua mata dadu 7 atau 9. Nefa menang jika jumlah mata dadu yang muncul adalah 7 dan Fadlan menang jika jumlah mata dadu yang muncul adalah 9. Peluang Nefa menang adalah ...
- a. $\frac{14}{33}$ b. $\frac{8}{63}$ c. $\frac{76}{441}$ d. $\frac{6}{7}$ e. $\frac{5}{7}$

22. Diberikan segitiga lancip ABC . Perpotongan garis-garis tinggi segitiga ABC adalah H . Titik M merupakan titik tengah sisi BC dan P merupakan proyeksi dari H ke garis AM . Diketahui $BP = 21, CP = 27$ dan $MP = 10$. Panjang AP adalah
- a. $\frac{75}{2}$ b. $\frac{77}{2}$ c. $\frac{79}{2}$ d. 40 e. 41

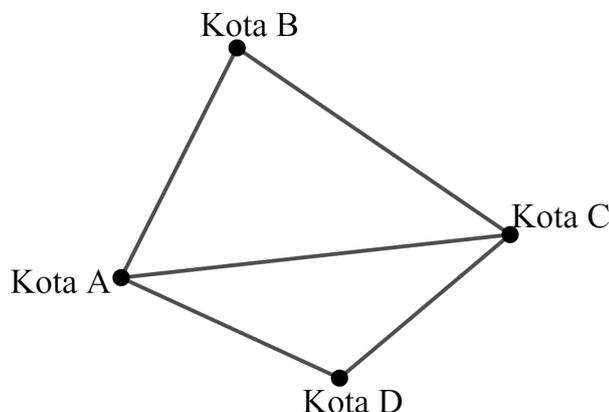
23. Banyaknya tripel bilangan asli (x, y, z) sedemikian hingga $xyz = 30^{2019}$ dan memenuhi

$$2x^2y + 4y^2z + z^2x = x^2z + 4y^2x + 2z^2y$$

adalah ...

- a. 0 b. 1 c. 1010^3 d. $3 \cdot 1010^3$ e. Tidak ada di pilihan
24. Diketahui x dan y merupakan bilangan real yang memenuhi $4x^2 + y^2 - 8x - 4y - 28 = 0$. Jika nilai minimum yang mungkin dari $4x^2 + y^2$ dapat dinyatakan sebagai $a + b\sqrt{2}$, nilai dari $a + b$ adalah ...
- a. 17 b. 18 c. 19 d. 20 e. 21

25. Adryan adalah seorang penyanyi dangdut terkenal. Ia akan mengadakan tur selama 8 hari di kota A, B, C dan D . Setiap harinya, Adryan akan melakukan 1 konser di kota tertentu dan akan berpindah ke kota lain untuk konser (seperti pada gambar). Diketahui bahwa semua kota terhubung dengan kota lainnya kecuali kota B dan D . Banyaknya kemungkinan rute tur yang berawal di kota A dan berakhir di kota A pula adalah ...



- a. 15 b. 32 c. 91 d. 154 e. 220

2 Isian

1. Misalkan x_1, x_2, \dots, x_{10} merupakan akar-akar dari polinomial $P(x) = x^{10} + x^9 + \dots + 1$. Nilai dari

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{1-x_n}$$

adalah ...

2. Banyaknya bilangan asli 4 digit yang tidak memuat "30" pada digit-digitnya adalah ...
(Contoh : 8091 tidak memuat 30 sedangkan 1309 memuat 30)
3. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan BC sejajar AD . Titik O merupakan perpotongan AC dan BD serta E adalah titik tengah BC . Titik K merupakan perpotongan AE dan BD serta M adalah titik tengah DK . Apabila $MO = 8$ dan $BD = 30$, maka panjang BO adalah ...
4. Untuk setiap bilangan asli n , didefinisikan

$$u_n(x) = x^{2n} - x^n + 1$$

Banyaknya bilangan asli n dimana $1 \leq n \leq 30$ sedemikian hingga polinom $u_1(x)$ habis membagi polinom $u_n(x)$ adalah ...

5. Misalkan

$$f(x) = \sin x + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \sin \left(x - \frac{2\pi}{4} \right) + \sqrt{2^3} \sin \left(x - \frac{3\pi}{4} \right) + \dots + \sqrt{2^{2019}} \sin \left(x - \frac{2019\pi}{4} \right)$$

Nilai maksimum dari $f(x)$ adalah ...