

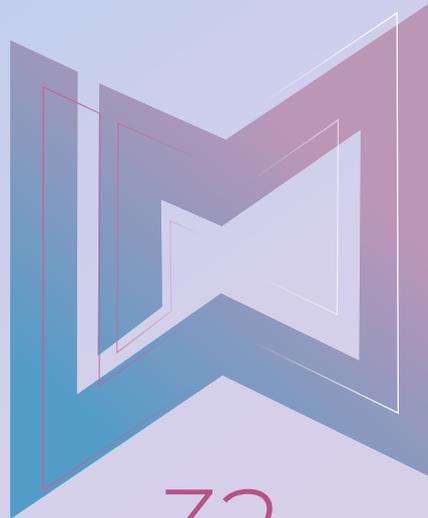


UNIVERSITAS
GADJAH MADA



32

SOAL BABAK PENYISIHAN
LOMBA MATEMATIKA
NASIONAL KE-32
TAHUN 2021
UNIVERSITAS GADJAH MADA



32

SMA

Soal Babak Penyisihan LMNas 32 UGM Tingkat SMA

1 Pilihan Ganda

1. Diketahui $x = \frac{a}{b}$ dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$ merupakan solusi dari persamaan

$$\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1} = 1.$$

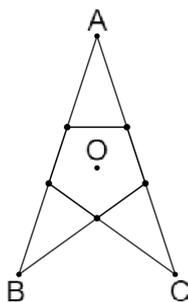
Nilai $a + b = \dots$

- a. 3 b. 5 c. 11 d. 13 e. 17
2. Dinotasikan $S(n)$ sebagai penjumlahan dari digit n . Sebagai contoh, $S(13) = 1 + 3 = 4$.
Nilai dari

$$\sum_{n=1}^{2021} S(n)(-1)^n$$

adalah \dots

- a. -1011 b. -1010 c. -1001 d. -1111 e. -1100
3. Dua belas bola yang terdiri dari 8 bola abu-abu identik, 3 bola putih identik, dan 1 bola hitam akan diletakkan pada 4 kotak identik. Banyak cara menaruh bola-bola tersebut jika di dalam tiap kotak, bola abu-abu lebih banyak daripada bola putih adalah \dots
- a. 13 b. 15 c. 17 d. 20 e. 22
4. Diberikan segilima beraturan dan 3 buah segitiga identik seperti pada gambar.



Jika O adalah titik tengah segilima beraturan, maka perbandingan luas $\triangle AOB : \triangle BOC$ adalah \dots

- a. $(2 \sin 72^\circ) : 1$
b. $(2 \cos 72^\circ) : 1$
c. $(\cos 72^\circ) : 2$

- d. $(\sin 72^\circ) : 2$
 e. $(\sin 72^\circ \cos 72^\circ) : 2$

5. Diberikan barisan (a_n) yang memenuhi

$$a_{n+1} = \frac{a_n a_{n-1}}{\sqrt{4(a_{n-1})^2 - 4(a_n)^2}}.$$

Jika $a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ dan $a_2 = \frac{1}{2}$, nilai dari

$$2^{2526} \prod_{n=1}^{100} a_n$$

adalah ...

- a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{1}{2}$ c. 1 d. 2 e. 4

6. Diberikan x dan y merupakan bilangan asli yang memenuhi

$$x + y^2 + x^3 = 1481.$$

Nilai minimum xy adalah ...

- a. 72 b. 248 c. 296 d. 312 e. 344

7. Misalkan $L = \{1000, 1101, 2382, 3273, 3394, 4045\}$. Banyaknya fungsi $f : L \rightarrow L$ sedemikian sehingga untuk setiap $n \in L, n + f(n)$ merupakan bilangan genap adalah ...

- a. 316 b. 729 c. 361 d. 646 e. 900

8. Diberikan persegi $ABCD$. Titik P dan Q berturut-turut terletak pada sisi CD dan AD sedemikian sehingga $\angle BPQ = 90^\circ$. Jika $\angle PAQ = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$ dan $\frac{BQ}{AP} = \frac{\sqrt{m}}{n}$, dengan m dan n bilangan asli relatif prima, maka $m - n = \dots$

- a. 11 b. 12 c. 13 d. 14 e. 15

9. Nilai dari

$$\prod_{n=1}^{89} (\tan(n^\circ) \cos(1^\circ) + \sin(1^\circ))$$

adalah ...

- a. $\sec(1^\circ)$ b. $\cot(1^\circ)$ c. $\cot(89^\circ)$ d. $\csc(1^\circ)$ e. $\tan(45^\circ)$

10. Diketahui $B = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \dots, \frac{20}{3}\right\} \cup \left\{\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{21}{5}\right\}$. Jika terdapat $m, n \in B$ sehingga berlaku:

- (a) n tidak bulat (pecahan); dan
 (b) $m \times n$ prima,

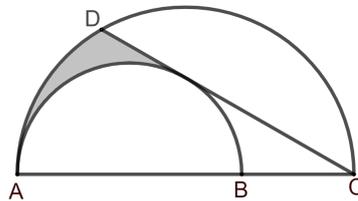
maka nilai $\max\left(\frac{m}{n}\right)$ adalah ...

- a. $\frac{50}{3}$ b. $\frac{25}{2}$ c. $\frac{50}{9}$ d. $\frac{63}{5}$ e. $\frac{63}{25}$

11. Tessia mengambil 6 bilangan secara bergantian tanpa pengembalian pada himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 32\}$. Banyak cara Tessia mengambil bilangan agar 3 bilangan pertama membentuk barisan aritmetika, 3 bilangan terakhir membentuk barisan aritmetika dan 6 bilangan yang diambil juga membentuk barisan aritmetika adalah ...
- a. 87 b. 144 c. 2088 d. 3132 e. 12528

Keterangan: Salah satu contoh pengambilan yang mungkin adalah 5-1-3-4-2-6, karena tiga bilangan pertama dapat disusun menjadi barisan aritmetika (1,3,5), tiga bilangan terakhir juga dapat disusun menjadi barisan aritmetika (2,4,6), dan enam bilangan seluruhnya dapat dibentuk menjadi barisan aritmetika (1,2,3,4,5,6).

12. Diberikan dua setengah lingkaran yang masing-masing berdiameter AB dan AC seperti pada gambar berikut. CD merupakan tali busur di setengah lingkaran besar yang menyinggung setengah lingkaran kecil. Jika $AC = 12$ dan $\angle ACD = 30^\circ$, luas daerah yang berwarna abu-abu adalah ...



- a. $\frac{1}{3}\pi + \sqrt{3}$ b. $\frac{2}{3}\pi$ c. $\frac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$ d. $\frac{2}{3}\pi - \sqrt{3}$ e. $\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$
13. Jika polinomial $P(x) = x^3 + x^4 + x^5 + \dots + x^{2021}$ dibagi $(x - 1)^3$ bersisa $ax^2 + bx + c$, maka nilai dari $4a + 2b + c$ adalah ...

- a. $\binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \binom{2022}{3} - 1$
 b. $\binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \binom{2022}{3} - 3$
 c. $\binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \binom{2022}{3} - 5$
 d. $\binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \binom{2022}{3} - 7$
 e. $\binom{2022}{1} + \binom{2022}{2} + \binom{2022}{3} - 9$

14. Diketahui $[x]$ menyatakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar atau sama dengan x . Sisa pembagian $\lceil (8 + \sqrt{59})^{100} \rceil$ oleh 16 adalah ...
- a. 0 b. 2 c. 4 d. 6 e. 8

15. Diketahui himpunan $A = \{2011, 2012, \dots, 2021\}$. Dibentuk 3 buah subhimpunan dari A , yaitu A_1, A_2, A_3 dengan syarat:

- (a) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A$;
 (b) A_2 tidak memiliki irisan anggota dengan subhimpunan lain;
 (c) $|A_1 \cap A_3| = 1$; dan
 (d) Setiap subhimpunan pasti memiliki bilangan prima.

Banyaknya tripel terurut (A_1, A_2, A_3) yang memenuhi syarat di atas adalah ...

- a. 6561 b. 13122 c. 19683 d. 26244 e. 39366

16. Diberikan persegi $ABCD$ dengan panjang sisi 8. Titik W, X, Y, Z berturut-turut terletak pada sisi AB, BC, CD, DA sedemikian sehingga $WXYZ$ merupakan persegi. Garis AC memotong WZ dan YX berturut-turut di P dan Q . Jika $PQ = 6$, luas persegi $WXYZ$ adalah ...

- a. $24\sqrt{2}$ b. 36 c. 32 d. $32\sqrt{2}$ e. $48\sqrt{2} - 18$

17. Diberikan bilangan real positif a, b, c, d dengan $a + b + c + d = 2$. Nilai maksimum dari

$$\frac{abc}{a^3 + 2b^3 + 4c^3} + ad + bd + cd + 1$$

tercapai ketika $c = k$. Nilai dari $(k + 1)^6$ adalah ...

- a. 2 b. 4 c. 8 d. 16 e. 32

18. Dua digit terakhir dari $KPK(5^{11} + 1, 5^{21} + 1, 5^{31} + 1, \dots, 5^{2021} + 1)$ adalah ...

- a. 14 b. 34 c. 54 d. 74 e. 94

19. Fadlan mempunyai 8 minggu untuk mempersiapkan suatu kompetisi matematika. Setiap minggu, Fadlan akan belajar salah satu di antara subbidang Aljabar, Teori Bilangan, Kombinatorika, dan Geometri. Fadlan tidak suka Geometri, sehingga dia tidak ingin belajar Geometri 2 minggu berturut-turut. Banyaknya cara Fadlan memilih subbidang selama 8 minggu tersebut adalah ...

- a. 44631 b. 44388 c. 11173 d. 11097 e. 2793

20. Diberikan sebuah lingkaran L yang berpusat di O . Lingkaran C_1 dan C_2 berada di dalam L sedemikian hingga C_1 dan C_2 berturut-turut menyinggung L di titik A dan B . C_1 dan C_2 juga saling bersinggungan luar di S . Jika $OS = 2, AS = \sqrt{6}$, dan $BS = 3$, nilai dari kuadrat panjang AB adalah ...

- a. 12 b. 16 c. 18 d. 24 e. 27

21. Diketahui x, y, z adalah tiga buah bilangan real yang diambil pada interval $[2, 6]$ dengan $(x + y - 10)(x - y) \neq 0$. Nilai minimum dari

$$\left(\frac{xy(5z - x)(5z - y)}{z(x + y - 10)(x - y)} \right)^2$$

adalah ...

- a. $\frac{625}{4}$ b. $\frac{40000}{81}$ c. 576 d. $\frac{35721}{4}$ e. $\frac{20000}{9}$

Keterangan : Interval $[a, b]$ menyatakan himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a \leq x \leq b$.

22. Diketahui a, b, c, d, e , dan f adalah bilangan-bilangan bulat nonnegatif yang kurang dari 10. Banyaknya 6-tupel (a, b, c, d, e, f) yang memenuhi persamaan $3a + 3b + 8c + 11d - 3e - 33f = 0$ adalah ...

- a. 2970 b. 3003 c. 3060 d. 3094 e. 3300

23. SMA Mondstadt yang memiliki 2021 siswa mengadakan pemilihan ketua OSIS. Terdapat dua kandidat ketua OSIS, Jean dan Barbara. Setiap kandidat juga memiliki hak pilih. Jean dan Barbara memilih dirinya masing-masing, serta Albert yang merupakan penggemar berat Barbara juga memilih Barbara. Selanjutnya, satu per satu siswa dari 2018 siswa tersisa memilih kandidat ketua OSIS secara acak dengan peluang yang proporsional (linear) dengan banyak vote sementara masing-masing kandidat. Contohnya, pemilih pertama berpeluang memilih Barbara sebesar $\frac{2}{3}$ dan memilih Jean sebesar $\frac{1}{3}$. Peluang Barbara memenangkan pemilihan ketua OSIS adalah ...
- a. $\frac{3029}{4038}$ b. $\frac{3030}{4039}$ c. $\frac{3031}{4040}$ d. $\frac{3032}{4041}$ e. $\frac{3033}{4042}$
24. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 8$, $BC = 5$, $CA = 9$. Misalkan ω adalah lingkaran dalamnya. Sebuah lingkaran Ω melalui titik B dan C serta menyinggung ω . Garis singgung persekutuan dari Ω dan ω memotong AC di P . Maka panjang AP adalah ...
- a. $\frac{15}{4}$ b. 4 c. $\frac{17}{4}$ d. $\frac{9}{2}$ e. $\frac{19}{4}$
25. Diberikan $\triangle ABC$ yang panjang ketiga sisinya merupakan bilangan bulat dan panjang diameter lingkaran luarnya $\frac{125}{2}$. Jika k menyatakan keliling $\triangle ABC$, nilai rata-rata dari semua k yang memenuhi adalah ...
- a. 160 b. 146 c. 139 d. 132 e. 125

2 Isian Singkat

1. Diberikan a_1, a_2, a_3 adalah bilangan real yang lebih dari 3 dan memenuhi

$$a_1 + a_2 + a_3 = 24.$$

Nilai maksimum dari $(a_1 a_2 - 2a_1 - a_2 + 2)^2 (a_2 a_3 - 3a_2 - 2a_3 + 6)$ adalah ...

2. Banyaknya tripel bilangan asli (p, q, r) yang memenuhi

$$pq + pr + qr + p + q + r = 2pqr - 1$$

adalah ...

3. Diketahui fungsi $f : \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sehingga $f(f(f(x))) = 1$ untuk setiap $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Banyaknya fungsi f yang memenuhi adalah ...
4. Diberikan lingkaran ω . Seperempat lingkaran Γ berada di dalam ω sedemikian hingga kedua jari-jarinya membentuk tali busur pada ω . Misalkan kedua tali busur tersebut memotong ω di titik-titik A, B , dan C , dengan B merupakan pusat Γ . Misalkan tali busur m pada ω menyinggung Γ di titik D . Misalkan E dan F adalah titik-titik ujung m , dengan E terletak lebih dekat dengan A . Terakhir, misalkan titik G pada \overline{AC} sedemikian hingga $\overline{DG} \perp \overline{AC}$. Jika $DE = 12$, $AC = 20$, dan $\frac{DG}{DF}$ dapat ditulis sebagai pecahan sederhana $\frac{p}{q}$ dengan p dan q merupakan bilangan asli, maka nilai dari $10p - q = \dots$

5. Misalkan

$$A = \sum_{n=1}^{103} n^3 (n+1)^3.$$

Sisa pembagian A oleh 105^2 adalah ...