



UNIVERSITAS
GADJAH MADA



32

SOAL BABAK PENYISIHAN
LOMBA MATEMATIKA
NASIONAL KE-32
TAHUN 2021
UNIVERSITAS GADJAH MADA



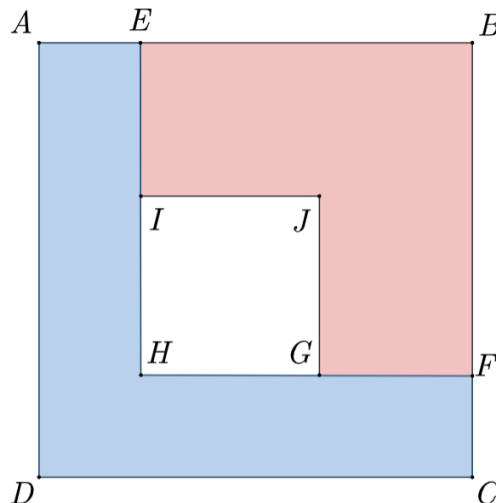
32

SMP

Soal Babak Penyisihan LMNas 32 UGM Tingkat SMP

1 Pilihan Ganda

1. Jika a dan b adalah akar persamaan $2x^2 - 5x + 2 = 0$, maka nilai $5a^2b - 2a^3b$ adalah ...
a. 2 b. 4 c. 6 d. 8 e. 10
2. Diketahui a, b , dan c adalah tiga bilangan asli berbeda. Jika diketahui a adalah kuadrat dari bilangan prima, $b > 3a$ dan b habis membagi c , nilai terkecil dari c yang memenuhi adalah ...
a. 10 b. 11 c. 13 d. 19 e. 26
3. Sejumlah 20 kelereng yang terdiri dari 8 kelereng merah dan 12 kelereng biru akan dibagikan kepada 3 orang anak. Setiap anak mendapatkan paling sedikit 2 kelereng merah dan 3 kelereng biru. Banyaknya cara membagikan kelereng tersebut ada sebanyak ...
a. 16 b. 24 c. 36 d. 48 e. 60
4. Perhatikan gambar berikut



- Diketahui $ABCD$ persegi dengan $AE = CF = 10$, $FG = EI = 15$, dan luas daerah yang berwarna biru sama dengan luas daerah yang berwarna merah. Panjang $AD = \dots$
- a. 32,5 b. 37,5 c. 40 d. 42,5 e. 47,5
 5. Himpunan semua bilangan real a sehingga $3x^2 + 3ax + a + \frac{1}{4} = 0$ memiliki penyelesaian real untuk x adalah ...

- a. $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \leq \frac{2 - \sqrt{7}}{3} \text{ atau } a \geq \frac{2 + \sqrt{7}}{3} \right\}$
- b. $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \leq \frac{2 - 2\sqrt{7}}{3} \text{ atau } a \geq \frac{2 + 2\sqrt{7}}{3} \right\}$
- c. $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{3} \text{ atau } a \geq \frac{3 + \sqrt{7}}{3} \right\}$
- d. $\left\{ a \in \mathbb{R} \mid a \leq \frac{3 - 2\sqrt{7}}{3} \text{ atau } a \geq \frac{3 + 2\sqrt{7}}{3} \right\}$

e. Tidak ada bilangan real a yang mungkin

6. Misalkan $f(n)$ menyatakan jumlahan semua faktor prima dari n yang kurang dari 10. Nilai dari $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(60)$ adalah ...
- a. 221 b. 226 c. 231 d. 236 e. 241
7. Huruf yang merangkai kata SEMNAS akan diletakan pada sisi kubus dengan 6 sisi. Banyaknya cara menyusun huruf tersebut dengan syarat huruf yang sama tidak boleh berada pada sisi yang berlawanan adalah ...
- a. 12 b. 18 c. 24 d. 30 e. 36
8. Diberikan persegi $ABCD$ dan dua buah seperempat lingkaran dengan busur dari salah satu seperempat lingkaran melalui titik A dan C serta busur dari seperempat lingkaran yang lain melalui titik B dan D . Jika panjang sisi persegi dan jari-jari seperempat lingkaran adalah a cm, maka jarak terpendek titik potong kedua busur ke ruas garis AD adalah ...
- a. $\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{2}\right)a$ b. $\left(\frac{2 - \sqrt{3}}{3}\right)a$ c. $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{3}\right)a$ d. $\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)a$ e. $\left(\frac{3 - \sqrt{3}}{3}\right)a$

9. Jumlahan semua $x \in \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$\sqrt[3]{3x - 4} - \sqrt[3]{2x - 3} = \sqrt[3]{x - 1}$$

adalah ...

- a. $\frac{7}{3}$ b. $\frac{5}{2}$ c. $\frac{17}{6}$ d. $\frac{23}{6}$ e. $\frac{11}{3}$
10. Diketahui bilangan kuadrat 5 digit \overline{abcde} memenuhi sifat berikut:
- (a) \overline{de} merupakan bilangan kuadrat;
- (b) \overline{bcd} merupakan bilangan kuadrat; dan
- (c) $\overline{cd} = 4 \times \overline{ab}$.

Nilai dari $a + b + c + d + e$ adalah ...

- a. 19 b. 23 c. 26 d. 28 e. 29
11. Sepuluh siswa akan berfoto bersama dalam posisi berjejer. Di antara 10 siswa tersebut, terdapat 3 orang yang memakai baju merah, 3 orang yang memakai baju kuning, dan 4 orang memakai baju hijau. Posisi foto mereka memiliki ketentuan:
- (a) Siswa yang berbaju merah tidak boleh bersebelahan dengan siswa berbaju hijau; dan

- (b) Siswa yang berbaju kuning harus bersebelahan dengan 1 siswa berbaju merah dan 1 siswa berbaju hijau.

Dari ketentuan tersebut, banyak cara mengatur posisi mereka adalah ...

- a. 6792 b. 8736 c. 10368 d. 12096 e. 13908
12. Terdapat enam buah lingkaran kecil yang berada di dalam satu buah lingkaran besar yang sama dengan setiap lingkaran kecil menyinggung lingkaran besar dan bersinggungan tepat dengan dua buah lingkaran kecil lainnya. Jika panjang jari-jari lingkaran besar sama dengan 1 satuan panjang, luas seluruh lingkaran kecil tersebut adalah ...
- a. $\frac{1}{9}\pi$ b. $\frac{1}{6}\pi$ c. $\frac{2}{3}\pi$ d. $\frac{12}{13}\pi$ e. $\frac{24}{25}\pi$
13. Diketahui $P(n) = n!(n^2 + 3n + 1)$. Sisa pembagian $P(1) + P(2) + \dots + P(2021)$ jika dibagi 2021 adalah ...
- a. 2016 b. 2017 c. 2018 d. 2019 e. 2020
14. Diberikan k bilangan asli. Misalkan $a = \text{KPK}(5k+4, 11k+9)$ dan $b = \text{FPB}(5k+4, 11k+9)$. Jika $ab + 3a + 2b = 3194$, maka nilai maksimum yang mungkin dari $a + b + k$ adalah ...
- a. 416 b. 628 c. 802 d. 1254 e. 1624
15. Diberikan tupel bilangan asli berbeda $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)$ dengan $a_i > 1$ dan a_i habis membagi a_{i+1} untuk setiap $i = 1, 2, 3, 4, 5$ dan a_6 habis membagi 2100. Banyaknya tupel yang memenuhi adalah ...
- a. 180 b. 240 c. 360 d. 720 e. 1080
16. Diberikan lingkaran α dengan pusat B dengan jari-jari 3. Titik C terletak pada lingkaran α dan titik A terletak di luar lingkaran sehingga segitiga ABC siku-siku di B . Garis AC memotong lingkaran di E , jika lingkaran dalam segitiga ABC memiliki jari-jari 1 dan menyinggung AC di H , maka panjang EH adalah ...
- a. $\frac{6}{5}$ b. $\frac{7}{5}$ c. $\frac{8}{5}$ d. $\frac{9}{5}$ e. 1
17. Diberikan barisan bilangan real positif $\{a_n\}$ dengan $a_1 = 1$ dan untuk setiap bilangan asli n , berlaku
- $$a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2 + 1} + \sqrt{a_n^2 - a_n + 1}}{\sqrt{a_n}}.$$
- Nilai a_{32} adalah ...
- a. $2^{1-2^{-30}} + \sqrt{2^{2-2^{-29}} - 1}$
 b. $2^{1-2^{-31}} + \sqrt{2^{2-2^{-30}} - 1}$
 c. $2^{1-2^{-32}} + \sqrt{2^{2-2^{-31}} - 1}$
 d. $2^{1-2^{-31}} + \sqrt{2^{2-2^{-32}} - 1}$
 e. $2^{1-2^{-32}} + \sqrt{2^{2-2^{-30}} - 1}$
18. Jumlah semua nilai a yang memenuhi $a^2 = b^4 + 16b + 1$ dengan a, b bilangan bulat tak negatif adalah ...
- a. 67 b. 71 c. 73 d. 79 e. 83

19. Sebuah kode terdiri dari angka 0,1,2,3,atau 4. Kode tersebut memuat setidaknya 3 angka bukan 0. Selain angka 0, tiap angka boleh digunakan maksimal sekali. Antarangka tidak 0 tidak boleh berdekatan (misal 1 dan 4). Banyaknya angka 0 tidak boleh lebih dari $\frac{2}{3}$ panjang kode. Banyak kode yang dapat dibuat dengan syarat tersebut adalah ...

Contoh kode yang diperbolehkan : 10300204

Contoh kode yang tidak diperbolehkan : 20001000000

- a. 7800 b. 7728 c. 7704 d. 6680 e. 6656

20. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 3, BC = 4$, dan $CA = 5$. Misalkan ω adalah lingkaran yang melalui titik B dan memotong sisi AB, BC , dan CA , berturut-turut, di titik E, D , dan (dua titik) F dan G dengan $AF < AG$ sehingga $EF = DF$. Jika $\frac{DG}{EG} = \frac{3}{4}$ dan $DE = \frac{a}{c}\sqrt{b}$, dengan a dan c adalah bilangan asli yang relatif prima dan b adalah bilangan asli yang tidak habis dibagi oleh kuadrat apapun selain 1, maka $a + b + c = \dots$

- a. 56 b. 41 c. 87 d. 99 e. 46

21. Nilai minimum dari $x + y$ yang memenuhi persamaan

$$x^2y^2 + 5x^2 + 10y^2 - 56x - 84y + 218 = 0$$

adalah ...

- a. -5 b. -3 c. 3 d. 5 e. 7

22. Untuk setiap bilangan asli n , $\tau(n)$ menyatakan banyaknya faktor positif dari n . Jika bilangan asli m dan n memenuhi $\tau(n^m) = 3\tau(n)$, banyaknya nilai berbeda dari $\tau(mn)$ adalah ...

- a. 3 b. 4 c. 5 d. 7 e. 8

23. Banyaknya cara memasukkan 18 buah kelereng identik ke dalam 3 buah gelas sedemikian hingga banyaknya kelereng di gelas pertama kurang dari banyaknya kelereng di gelas kedua dan banyaknya kelereng di gelas kedua kurang dari dua kali lipat banyaknya kelereng di gelas ketiga adalah ...

- a. 42 b. 43 c. 44 d. 45 e. 46

24. Diberikan segienam $ABCDEF$ yang keenam sudutnya sama besar. Jika $AB + DE = 505, BC + EF = 1011$, dan $CD + FA = 2021$, panjang diagonal AD adalah ...

- a. $\frac{758}{\sqrt{3}}$ b. 758 c. $758\sqrt{2}$ d. $758\sqrt{3}$ e. $\frac{1516}{\sqrt{3}}$

25. Diketahui x, y, z adalah tiga buah bilangan real yang diambil pada interval $[2,6]$ dengan $(x + y - 10)(x - y) \neq 0$. Nilai minimum dari

$$\left(\frac{xy(5z - x)(5z - y)}{z(x + y - 10)(x - y)} \right)^2$$

adalah ...

- a. $\frac{625}{4}$ b. $\frac{40000}{81}$ c. 576 d. $\frac{35721}{4}$ e. $\frac{2000}{9}$

Keterangan : Interval $[a, b]$ menyatakan himpunan semua bilangan real x yang memenuhi $a \leq x \leq b$.

2 Isian Singkat

1. Diketahui bahwa terdapat tepat satu tripel (a, b, c) bilangan real yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 4b + 7 \\ a^2 + 3c^2 = 6ac - 15 \\ 2b^2 + 2c^2 = 2bc + 6. \end{cases}$$

Nilai dari $a + b + c$ adalah ...

2. Diberikan bilangan bulat positif $k \in \{1, 2, \dots, 2021\}$. Diketahui terdapat tepat 25 pasangan bilangan bulat positif (x, y) yang memenuhi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{k}.$$

Banyaknya nilai k yang memenuhi adalah ...

3. Pada segiempat $ABCD$, diketahui $AB = 3\sqrt{3}$, $BC = 6\sqrt{2}$, dan $CD = 6$. Diketahui pula $\angle BCD = 90^\circ$ dan $\angle ABD = 2\angle CBD$. Jika P merupakan titik potong segmen AC dengan BD dan panjang CP dapat dinyatakan dalam bentuk $\frac{\sqrt{p}}{q}$, dengan p dan q bilangan asli yang saling prima, nilai $p + q$ adalah ...
4. Diketahui terdapat 2000 orang dalam suatu pesta. Misalkan M menyatakan maksimum banyaknya jabat tangan yang terjadi apabila tidak ada 3 orang atau lebih dengan jumlah jabat tangan yang sama. Jumlah semua digit dari M adalah ...
5. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$ dengan panjang rusuk 2 dan sebuah bola \mathcal{S} yang menyinggung keenam sisi kubus. Misalkan I titik tengah AB dan J suatu titik pada FG sedemikian hingga garis IJ menyinggung bola \mathcal{S} . Jika panjang IJ dinyatakan dalam bentuk $\frac{p}{q}$ dengan p dan q dua bilangan asli yang relatif prima, nilai $p + q$ adalah ...