

Soal Babak Penyisihan LMNas 34 UGM Tingkat SMA

Pilihan Ganda

- Diketahui $f(x + 2) + f(x + 1) = x + 2$ untuk setiap bilangan riil x . Jika $f(9) = 12$, maka nilai $f(62)$ adalah ...
a. 18 b. 20 c. 22 d. 24 e. 26
- Misalkan p dan q berturut-turut merupakan nilai minimum dan nilai maksimum dari $a + b$ dengan a dan b bilangan asli yang memenuhi $2a + ab + b = 838$. Nilai dari $p + q$ adalah ...
a. 840 b. 841 c. 474 d. 475 e. 476
- Sebuah kotak berisi 6 bola berwarna merah identik, 4 bola berwarna biru identik, dan 2 bola berwarna hijau identik. Jika diambil 3 bola secara acak dari kotak tersebut, maka peluang tepat 2 bola berwarna yang sama adalah ...
a. $\frac{150}{220}$ b. $\frac{152}{220}$ c. $\frac{148}{220}$ d. $\frac{146}{220}$ e. $\frac{154}{220}$
- Diberikan lingkaran dengan jari-jari r dan luas y . Lingkaran tersebut melalui semua titik sudut dari suatu segi-24 beraturan dengan luas x . Nilai dari $\frac{x}{y}$ adalah ...
a. $\frac{12}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi}$ b. $\frac{12}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})\pi}$ c. $\frac{6}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi}$ d. $\frac{4}{(\sqrt{6} - \sqrt{2})\pi}$ e. $\frac{4}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\pi}$
- Misalkan bilangan bulat n_1, n_2, \dots, n_m adalah semua nilai berbeda dari n yang menyebabkan persamaan $(x - nx + n - 1)^2 = n^2(x^2 - 1)$ memiliki tepat 1 solusi riil x . Nilai dari

$$\sum_{i=1}^m 2^{n_i}$$

adalah ...

- a. 16 b. 4 c. 5 d. 3 e. 1
- Sisa bagi $1^{2023} + 2^{2023} + \dots + 2024^{2023}$ oleh 2026 adalah ...
a. 0 b. 1 c. 1013 d. 1014 e. 2025
- Kompetisi sepakbola Slamet League diikuti oleh n tim dimana setiap tim melawan tim lain dalam tepat sekali pertandingan. Setiap tim akan mendapat berturut-turut 2, 1, dan 0 poin jika tim tersebut menang, seri, dan kalah pada setiap pertandingan. Misalkan kelompok A adalah kelompok minoritas berisikan 15 tim. Diketahui untuk sebarang tim, total poin yang diperoleh ketika melawan tim lain di kelompok A sama dengan total poin yang diperoleh ketika melawan tim lain di luar kelompok A . Jumlahan semua digit dari n adalah ...
a. 6 b. 7 c. 8 d. 9 e. 10

8. Diberikan segitiga ABC dan P titik di dalamnya sehingga $\angle PAB = \angle PBC = 30^\circ$ dan $\angle PAC = \angle PCB = 45^\circ$. Misalkan AP memotong BC di titik D . Jika $\frac{BD^2}{CD^2} = \frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan asli a dan b dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka nilai dari $a + b$ adalah ...

a. 2 b. 3 c. 5 d. 7 e. 8

9. Dua digit terakhir dari

$$\sum_{i=0}^{1502} \left\lfloor \frac{i(i+1)}{3} \right\rfloor$$

adalah ...

a. 02 b. 08 c. 26 d. 34 e. 52

10. Banyak minimum bilangan asli berbeda yang perlu diambil dari himpunan $\{1, 2, 3, \dots, 99\}$ sehingga dapat dipastikan terdapat 2 bilangan asli yang tidak relatif prima adalah ...

a. 24 b. 25 c. 26 d. 27 e. 30

11. Seekor katak berada di titik $(0, 0)$ pada bidang kartesius. Dalam 1 langkah, katak tersebut dapat bergerak ke atas 1 satuan, ke kanan 1 satuan atau ke diagonal (1 satuan ke kanan dan ke atas satuan sekaligus). Katak tersebut akan kembali ke rumahnya yang berada di titik $(5, 5)$. Diketahui terdapat jurang di titik $(3, 4)$ dan katak tersebut harus melakukan tepat 2 langkah diagonal. Peluang katak tersebut dapat pulang ke rumahnya dengan selamat adalah ...

a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{1}{2}$ c. $\frac{5}{8}$ d. $\frac{2}{3}$ e. $\frac{3}{4}$

12. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 13$, $BC = 14$, dan $CA = 15$. Misalkan g adalah suatu garis singgung lingkaran dalam segitiga ABC . Jika g memotong AB dan AC berturut-turut di titik X dan Y sehingga $XY = 5$, maka nilai dari $7(AX - AY)^2$ adalah ...

a. 37 b. 39 c. 42 d. 45 e. 47

13. Misalkan x_1, x_2, x_3, x_4 , dan x_5 suatu bilangan riil positif yang memenuhi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 34$. Nilai minimum dari

$$x_1^2 \cot \frac{\pi}{34} + \frac{x_2^2}{2} \cot \frac{2\pi}{34} + \frac{x_3^2}{4} \cot \frac{4\pi}{34} + \frac{x_4^2}{8} \cot \frac{8\pi}{34} + \frac{x_5^2}{16} \tan \frac{16\pi}{34}$$

adalah ...

a. $1156 \cot \frac{\pi}{34}$ b. $1156 \tan \frac{\pi}{34}$ c. $34 \cot^2 \frac{\pi}{34}$ d. $34 \tan^2 \frac{\pi}{34}$ e. $34 \cot \frac{\pi}{34}$

14. Didefinisikan fungsi $\sigma(a)$ sebagai jumlahan semua faktor positif dari bilangan asli a . Diketahui $\sigma(a) = 189000$ dan $\sigma(2a) = 405000$. Jumlahan semua nilai yang mungkin dari $\sigma(4a)$ adalah ...

a. 837000 b. 999000 c. 1053000 d. 1377000 e. 1971000

15. Diberikan himpunan

$$G = \{(a, b, c, d) : a, b, c, d \in \{0, 1, \dots, 10\} \text{ dan } 11 \nmid (ad - bc)\}.$$

Banyaknya anggota dari G adalah ...

a. 14400 b. 9900 c. 1210 d. 7920 e. 13200

16. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 12$, $BC = 5$, dan $AC = 13$. Misalkan m merupakan bilangan riil terbesar sehingga berlaku $AP + BP + CP \geq m$ untuk sebarang titik P . Diketahui $m^2 = a + b\sqrt{c}$ untuk suatu bilangan asli a, b , dan c dengan c tidak habis dibagi bilangan kuadrat sempurna apapun selain 1. Nilai dari $a - b + c$ adalah ...

a. 98 b. 106 c. 109 d. 112 e. 120

17. Diberikan barisan (a_n) dengan $a_0 = 1$, $a_1 = 7$, dan memenuhi

$$a_n - 2n^2 a_{n-1} + (n^4 - 2n^3 + n^2) a_{n-2} = (n-1) \cdot n!$$

untuk setiap $n \geq 2$. Sisa bagi dari $\frac{a_{2002}}{2002!} - \frac{2002a_{2001}}{2001!}$ oleh 2003 adalah ...

- a. 0 b. 8 c. 1995 d. 1996 e. 2002
18. Banyaknya bilangan bulat $0 \leq a \leq 2023$ yang menyebabkan $7 \mid \binom{2023}{a}$ adalah ...
- a. 1608 b. 1609 c. 1860 d. 1861 e. 1898
19. Diketahui terdapat n bilangan riil berbeda p_1, p_2, \dots , dan p_n yang memenuhi pertidaksamaan $(1 + p_i p_j)^2 \leq 0.99(1 + p_i^2)(1 + p_j^2)$ untuk setiap $1 \leq i < j \leq n$. Nilai maksimum dari $n^2 + n + 8$ adalah ...
- a. 1198 b. 1064 c. 1268 d. 1130 e. 1000
20. **(Soal dianulir)** Diberikan lingkaran L_1 dan L_2 dengan perbandingan luas $\frac{16}{9}$. Diketahui L_2 berada di dalam L_1 dan menyinggung L_1 . Titik A dan B berada pada lingkaran L_1 sehingga AB menyinggung L_2 di titik C . Jika $AC = 5$ dan $BC = 3$, maka panjang jari-jari lingkaran L_1 adalah ...
- a. $\frac{13}{4}$ b. $\frac{7}{2}$ c. $\frac{15}{4}$ d. 4 e. $\frac{17}{4}$
21. Misalkan a, b, c , dan d adalah bilangan riil positif yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{cases} ab + ac + ad = 3 - \frac{ab(c+d)}{2}, \\ bc + bd + cd = 5 - \frac{cd(a+b)}{2}. \end{cases}$$

Diketahui nilai minimum dari

$$\frac{a+b+c+d}{2} - \frac{ab+ac+ad+bc+bd+cd}{3} + \frac{5}{6}$$

adalah $\frac{e\sqrt{f}}{g}$ untuk suatu bilangan asli e, f , dan g dengan $\text{FPB}(e, g) = 1$ dan f tidak habis dibagi bilangan kuadrat sempurna apapun selain 1. Nilai dari $e - f + g$ adalah ...

- a. 10 b. 7 c. 12 d. 9 e. 11
22. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan asli dengan $a \neq b$ serta memenuhi $3 \nmid (b+c)$ dan $a^2 + ab + b^2 = 3c^2$. Nilai minimum dari c adalah ...
- a. 11 b. 13 c. 15 d. 17 e. 18
23. Pada suatu ruang, terdapat sejumlah bola identik yang saling berpotongan dan menghasilkan beberapa ruang, termasuk ruang yang berada di luar semua bola tersebut. Sebagai contoh, jika terdapat 1 bola, akan terbentuk 2 ruang. Adapun jika terdapat 2, 3, dan 4 bola, banyak maksimum ruang yang dapat terbentuk berturut-turut 4, 8, dan 16. Banyak maksimum ruang yang dapat terbentuk jika terdapat 23 bola adalah ...
- a. 2048 b. 3124 c. 3588 d. 4096 e. 4646
24. Diberikan segienam beraturan $ABCDEF$. Misalkan X, Y , dan Z berturut-turut adalah titik pada AB, CD , dan EF sehingga $\frac{AX}{XB} = \frac{CY}{YD} = \frac{EZ}{ZF} = \frac{3}{4}$. Misalkan pula titik P, Q, R, S, T , dan U berturut-turut adalah titik potong dari AC dengan XZ , AC dengan XY ,

CE dengan XY , CE dengan YZ , EA dengan YZ , dan EA dengan XZ . Diketahui perbandingan luas antara segienam $PQRSTU$ dengan segienam $ABCDEF$ adalah $\frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB $(p, q) = 1$. Nilai dari $p + q$ adalah ...

a. 62 b. 355 c. 362 d. 380 e. 454

25. (Soal dianulir) Dua digit terakhir dari

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{\frac{n^3-n}{6}} \binom{2023}{n}$$

adalah ...

- a. 08 b. 12 c. 20 d. 56 e. 60

Isian Singkat

1. Diberikan fungsi $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ yang memenuhi

$$f(x^2) + 4f(y^2) = (f(x - y) + f(y))(f(x + y) + f(y)).$$

untuk setiap bilangan bulat x dan y . Jika $f(2048) \neq 0$, maka bilangan asli terkecil n yang memenuhi $2^n > f(2048)$ adalah ...

2. Misalkan b adalah bilangan riil yang memenuhi

$$(x^2 + bx + b)(2x^2 + (b - 4)x + (b - 4)) \geq 0$$

untuk setiap bilangan riil x . Misalkan pula n adalah hasil kali semua nilai b yang mungkin. Nilai dari $|n|$ adalah ...

3. LMNas mengadakan suatu pesta yang dihadiri oleh beberapa peserta dan memenuhi

- setiap peserta mengenal tepat 340 peserta lainnya;
- untuk setiap 2 peserta berbeda yang saling kenal, terdapat tepat 15 peserta lainnya yang dikenal oleh kedua peserta tersebut; dan
- untuk setiap 2 peserta berbeda yang tidak saling kenal, terdapat tepat 36 peserta lainnya yang dikenal oleh kedua peserta tersebut.

Untuk setiap peserta a dan b yang berbeda, diketahui peserta a mengenal peserta b jika dan hanya jika peserta b mengenal peserta a . Banyaknya peserta pada pesta tersebut adalah ...

4. (Soal salah) Diberikan segi-34 beraturan $A_1A_2 \dots A_{34}$ dengan $A_3A_{20} = 2$. Diketahui luas dari segiempat $A_1A_4A_{10}A_{20}$ adalah $2 \sin\left(\frac{p\pi}{34}\right) \sin\left(\frac{q\pi}{34}\right) \sin\left(\frac{r\pi}{34}\right)$ untuk suatu bilangan asli p, q , dan r dengan $p < q < r < 9$. Nilai dari $p + q + r$ adalah ...

5. Diberikan fungsi $\mu : \mathbb{N} \rightarrow \{-1, 1\}$ dengan $\mu(1) = 1$ dan $\mu(p_1p_2 \dots p_k) = (-1)^k$ untuk setiap bilangan prima (tidak harus berbeda) p_1, p_2, \dots, p_k . Selain itu, didefinisikan $\sigma(n)$ sebagai jumlahan semua faktor positif dari bilangan asli n . Nilai dari

$$\sum_{d|7260} \mu(d)\sigma(d)$$

adalah ...