

Soal Babak Semifinal LMNas 34 UGM Tingkat SMA

Bagian I

1. Misalkan x, y, z bilangan riil positif dengan $\frac{1}{xyz} = \frac{1}{9}$. Diketahui nilai maksimum dari

$$\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}}{(x+z)^2 - (x^2 + yz) + (z+y)^2 - (z^2 + xy) + (y+x)^2 - (y^2 + zx)}$$

adalah $\frac{a}{b}$ untuk suatu bilangan asli a dan b yang relatif prima. Nilai dari $a + b$ adalah ...

2. Jumlah 2 bilangan asli terkecil yang bersisa 3 jika dibagi 6 dan memiliki tepat 8 faktor positif adalah ...
3. Banyaknya kuadrupel bilangan bulat (x_1, x_2, x_3, x_4) yang memenuhi pertidaksamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 < 42$$

Dengan syarat $x_i \geq 2^i$ untuk setiap $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ adalah ...

4. Diberikan segitiga sama sisi ABC dengan panjang sisi 2 satuan. Dibentuk segitiga PQR dengan P, Q, R berada pada lingkaran dalam ABC dan memiliki keliling 3. Misalkan luas minimum bagian lingkaran dalam ABC yang tidak termuat oleh segitiga PQR adalah $\frac{\pi}{x} + \frac{\sqrt{y}}{z}$ untuk suatu bilangan bulat x, z dan bilangan asli bebas kuadrat y . Nilai dari $x + y - z$ adalah ...
5. Diketahui p, q , dan r adalah akar-akar dari polinom $P(x) = x^3 - 20x + 23$. Misalkan $Q(x)$ adalah polinom dengan akar-akar pq^2, qr^2 , dan rp^2 . Nilai dari $-Q(23)$ adalah ...
6. Banyak bilangan asli kurang dari 38808 yang tidak habis dibagi oleh 84 atau 462 adalah ...
7. Pada papan catur berukuran 3×3 akan dimasukkan angka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dengan masing-masing petak memuat 1 buah bilangan dan setiap angka digunakan tepat sekali. Suatu susunan disebut susunan *apik* jika jumlahan setiap baris dan kolomnya setidaknya 15. Banyaknya susunan apik adalah ...
8. Diberikan lingkaran Γ_1 dan Γ_2 yang berpotongan di P dan Q serta mempunyai jari-jari berturut-turut 11 dan 7. Suatu garis yang melewati P memotong kedua lingkaran tersebut di titik A dan B . Diketahui $PQ = 10$ dan m merupakan nilai maksimum dari panjang AB . Nilai dari $\lfloor m^2 \rfloor$ adalah ...

Bagian II

9. Diberikan persamaan

$$x^2 - [x^2] = (x - [x])^2.$$

Banyak nilai x pada interval $[1, 49]$ yang memenuhi persamaan tersebut adalah ...

10. Misalkan $S = \{p^{17} - p \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Banyak bilangan bulat q yang memenuhi $q \mid r$ untuk setiap $r \in S$ adalah ...

11. Suatu susunan huruf disebut susunan *sefuh* jika setiap huruf vokal berdampingan dengan setidaknya 1 huruf vokal lain. Banyaknya susunan sefuh yang dapat dihasilkan dari penyusunan PAPAMAMALELE adalah ...

Catatan: PPMMAAALLAEE dan PMAEPMAELLAA merupakan susunan sefuh, sedangkan APPMMAALLAEE dan PAPAMAMALELE bukan susunan sefuh

12. Diberikan segitiga ABC dengan $BC = 43$ dan I adalah titik pusat dari lingkaran dalamnya. Misalkan titik X dan Y berturut-turut berada pada AB dan AC dengan $AX = 23$, $AY = 20$, dan titik X, I, Y segaris. Diketahui pula bahwa

$$\frac{1}{AC \cdot BC} + \frac{1}{AB \cdot BC} + \frac{1}{AB \cdot AC} = \frac{p}{q}$$

untuk suatu bilangan asli p dan q yang relatif prima. Nilai dari $p + q$ adalah ...

13. Nilai dari

$$\begin{aligned} & \cot 80^\circ (\tan 50^\circ - \cot 20^\circ) + \cot 70^\circ (\tan 40^\circ - \cot 10^\circ) + \\ & \cot 50^\circ (\tan 20^\circ + \tan 80^\circ) + \cot 40^\circ (\tan 10^\circ + \tan 70^\circ) - \\ & \cot 20^\circ (\cot 80^\circ - \tan 50^\circ) - \cot 10^\circ (\cot 70^\circ - \tan 40^\circ) \end{aligned}$$

adalah ...

14. Diberikan barisan $(S_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ dengan definisi

$$S_n = \begin{cases} 2 & \text{untuk } n = 0, \\ 1 & \text{untuk } n = 1, \\ S_{n-1} + S_{n-2} & \text{untuk } n \text{ lainnya.} \end{cases}$$

Diketahui bahwa

$$\sum_{k=-23}^{23} \frac{S_{k-2} + S_k + S_{k+2}}{S_{k-1}S_{k+1}} = -\frac{p}{q}$$

untuk suatu bilangan asli p dan q yang relatif prima. Digit terakhir dari $p + q$ adalah ...

15. Dalam suatu ruangan terdapat 28 orang yang saling berjabat tangan satu sama lain. Setiap dua orang hanya berjabat tangan maksimal sekali. Diketahui tidak ada dua orang dengan jumlah jabat tangan sama yang berjabat tangan satu sama lain. Sebagai contoh, jika a dan b masing-masing berjabat tangan dengan tepat 14 orang, maka a dan b tidak berjabat tangan satu sama lain. Banyaknya jabat tangan maksimal yang mungkin terjadi adalah ...

16. Diberikan 9 garis berbeda $m_1, m_2, m_3, m_4, n_1, n_2, n_3, n_4,$ dan n_5 . Diketahui bahwa m_1, m_2, m_3 dan m_4 berpotongan di titik M serta n_1, n_2, n_3, n_4 dan n_5 berpotongan di titik N . Dibentuk lingkaran dengan jari-jari r_{4f+g-4} yang menyinggung garis $m_f, m_{f+1}, n_g, n_{g+1}$ untuk setiap $f = 1, 2, 3, g = 1, 2, 3, 4$ dan $r_{4i-3} = \frac{49-3i}{2}, r_j = 24-j$ untuk setiap $i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$. Misalkan $r_{12} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q yang relatif prima. Nilai dari $p+q$ adalah ...

Bagian III

17. Diberikan tiga fungsi $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang monoton naik dan memenuhi

$$f(x+y) = g(x) + h(y)$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Diketahui $f(0) = 20, g(-1) = -2,$ dan $g(1) = 10$. Nilai dari $h(2023)$ adalah ...

Catatan: Fungsi $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan monoton naik apabila untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x \leq y$ berlaku $p(x) \leq p(y)$.

18. Diketahui bahwa

$$43! = 604152630633738356373551\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6}13997507264512000000000$$

untuk suatu bilangan bulat $0 \leq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \leq 9$. Nilai dari $\overline{x_1x_2x_3x_4x_5x_6} - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6)$ adalah ...

19. Misalkan n adalah banyaknya suku tak nol pada hasil ekspansi dari ekspresi

$$(L + M - N - A - S)^{23} + (L - M + N - A + S)^{23}.$$

Diketahui bahwa sisa pembagian dari n oleh $3 \cdot 2^{20}$ adalah m . Dua digit terakhir dari m adalah ...

20. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 2, BC = 3,$ dan $AC = 4$ serta Γ sebagai lingkaran luarnya. Misalkan

- * Π_A adalah persegi terkecil sedemikian sehingga AC dan AB masing-masing memuat salah satu titik sudut dari Π_A serta BC memuat 2 titik sudut yang lain dari Π_A (setiap titik sudut dapat termuat di perpanjangan garis yang dimaksud);
- * Γ_A adalah lingkaran yang melalui A , perpotongan Π_A dengan AB , dan perpotongan Π_A dengan AC ;
- * $\Pi_B, \Gamma_B, \Pi_C,$ dan Γ_C dibentuk melalui pemisalan yang sama dengan kedua poin sebelumnya; serta
- * titik pusat dari $\Gamma, \Gamma_A, \Gamma_B,$ dan Γ_C berturut-turut adalah $O, O_A, O_B,$ dan O_C .

Diketahui bahwa

$$\frac{OO_A}{AO_A} \cdot \frac{OO_B}{BO_B} \cdot \frac{OO_C}{CO_C} = \frac{p}{q} \sqrt{r}$$

untuk suatu bilangan asli p, q, r dengan p dan q relatif prima serta r bilangan asli bebas kuadrat. Nilai dari $p+q+r$ adalah ...