

Soal Babak Penyisihan LMNas 34 UGM Tingkat SMP

Pilihan Ganda

1. Diketahui persamaan $2x^2 + 5x - 42 = 0$ memiliki solusi riil berbeda a dan b . Nilai maksimum dari $5a^2b^3 + 8a^3b^2$ adalah ...
a. 882 b. -882 c. -880 d. 13450.5 e. -13450.5
2. Diketahui $a + b + c + d = 34$ untuk suatu bilangan asli a, b, c , dan d . Nilai maksimum dari $ab + bc + cd$ adalah ...
a. 286 b. 290 c. 289 d. 288 e. 287
3. Misalkan P adalah banyaknya himpunan $S \subseteq \{1, 2, \dots, 15\}$ yang memenuhi
 - S memiliki 7 anggota;
 - median dari anggota-anggota S adalah 7;
 - anggota terkecil dari S adalah bilangan prima; dan
 - anggota terkecil dan anggota terbesar dari S relatif prima.

Nilai dari $34 + P$ adalah ...

- a. 323 b. 325 c. 327 d. 329 e. 333
4. Sebanyak 7 lingkaran kecil dengan jari-jari 1 dapat ditempatkan di dalam suatu lingkaran besar dengan jari-jari r sehingga tidak ada 2 lingkaran kecil yang saling bertumpang tindih. Diketahui luas minimum dari bagian lingkaran besar yang tidak tertutup oleh lingkaran kecil adalah $p\pi$ untuk suatu bilangan riil positif p . Nilai dari $\lfloor p \rfloor + \lceil p \rceil$ adalah ...
a. 2 b. 4 c. 7 d. 11 e. 12
5. Misalkan $f(x) = ax^2 - cx + b$ untuk suatu bilangan riil a, b , dan c . Jika

$$(a - c + 5)^2 + (b - c + 5)^2 + 2ab - 25 = c(c - 10),$$

maka nilai dari $f(1)$ adalah ...

- a. 0 b. -5 c. 5 d. -10 e. 10
6. Bilangan asli terbesar k sehingga $1^1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \dots \cdot 100^{100}$ habis dibagi 3^k adalah ...
a. 99 b. 198 c. 1683 d. 2277 e. 2520
7. Banyaknya cara memilih pasangan terurut (x, y) dengan $x, y \in \{1, 2, 3, \dots, 34\}$ sehingga nilai dari $x - y$ lebih besar dari 15 atau lebih kecil dari -15 adalah ...
a. 171 b. 240 c. 342 d. 684 e. 728

8. Diberikan trapesium $ABCD$ dengan $AD \parallel BC$ dan E titik pada CD sehingga $DE = EC = BC$. Diketahui $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ dan $\angle ADE = 75^\circ$. Jika $\angle BAE = \left(\frac{a}{b}\right)^\circ$ untuk suatu bilangan asli a dan b dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka nilai dari ab adalah ...
- a. 120 b. 90 c. 210 d. 270 e. 150

9. Misalkan bilangan kompleks x_1, x_2, \dots , dan x_{2023} adalah akar dari

$$P(x) = x^{2023} - x^{2022} + x^{2021} - \dots - x^2 + x - 1.$$

Nilai dari

$$(x_1^{4049} + x_1^{2024}) + (x_2^{4049} + x_2^{2024}) + \dots + (x_{2023}^{4049} + x_{2023}^{2024})$$

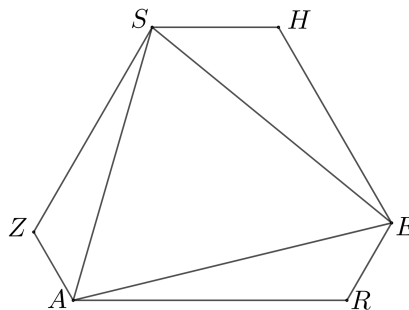
adalah ...

- a. -2024 b. -2023 c. 0 d. 2023 e. 2024
10. Diketahui $p^3 + 5q^3 - 48$ merupakan bilangan prima untuk suatu bilangan prima p dan q . Jumlahan semua digit dari nilai maksimum dari $p^q + q^p$ adalah ...
- a. 8 b. 9 c. 7 d. 10 e. 11
11. Misalkan $|A|$ adalah banyaknya anggota dari himpunan A . Suatu himpunan A dikatakan *lucu* jika $|A| \in A$. Misalkan P adalah banyaknya himpunan lucu A yang memenuhi

$$\{1, 2, 3, \dots, 14, 15\} \subseteq A \subseteq \{1, 2, 3, \dots, 33, 34\},$$

Digit terakhir dari P adalah ...

- a. 2 b. 4 c. 5 d. 6 e. 8
12. Diberikan segienam $SHERAZ$ yang keenam sudutnya sama besar dan luasnya 2023. Diketahui luas segitiga SEA adalah 1169. Nilai dari $(AZ - HE)^2$ adalah ...



- a. 360 b. $360\sqrt{3}$ c. 420 d. $420\sqrt{3}$ e. 450
13. Diberikan barisan (L_m) dengan definisi $L_m = \frac{\sqrt[3]{m^3 + m^2 - m - 1}}{m}$ untuk setiap $m \geq 2$. Misalkan n adalah bilangan asli terkecil yang memenuhi $L_2 \cdot L_3 \cdot L_4 \cdot \dots \cdot L_n > 34$. Nilai dari $\sqrt[3]{\frac{n+2}{4}} + 34$ adalah ...
- a. 53 b. 60 c. 65 d. 68 e. 69
14. Banyaknya pasangan bilangan bulat tak negatif (a, b, c, d) dengan $a, b, c, d \leq 7$ sehingga $a + b + c + d$ merupakan bilangan prima dan $ab = cd$ adalah ...
- a. 27 b. 54 c. 81 d. 108 e. 135
15. Banyaknya himpunan $A \subseteq \{1, 2, \dots, 20\}$ yang memuat 3 anggota sehingga tidak ada 2 anggota yang berurutan adalah ...
- a. 136 b. 171 c. 540 d. 816 e. 1140

16. Diberikan persegi $ABCD$ pada bidang koordinat Kartesius dengan koordinat titik A , B , C , dan D berturut-turut adalah $(-1, 1)$, $(1, 1)$, $(1, -1)$, dan $(-1, -1)$. Misalkan \mathcal{L} adalah lingkaran yang melalui keempat titik sudut $ABCD$. Mula-mula, Ries merotasikan lingkaran \mathcal{L} sejauh 15° searah jarum jam dengan pusat A . Kemudian, Ries ingin mengembalikan posisi lingkaran tersebut seperti semula. Ternyata, ia dapat melakukan hal tersebut dengan menggeser lingkaran \mathcal{L} sejauh p satuan ke kanan dan q satuan ke atas untuk suatu bilangan riil positif p dan q . Nilai $p + q$ adalah ...

a. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ b. $\frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ c. $\frac{\sqrt{2} + 1}{2}$ d. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$ e. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

17. Diberikan suku banyak tak konstan $P(x)$ yang memenuhi $P(x)P(y) = P(xy)$ untuk setiap bilangan riil x dan y serta $P(15) < 3415$. Nilai maksimum dari

$$P(0) + P(1) + P(2) + \dots + P(99) + P(100)$$

adalah ...

a. 25504235 b. 25492402 c. 25502500 d. 25512604 e. 34155143

18. Suatu bilangan asli n disebut bilangan *idol* jika $n = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \dots + \frac{34}{a_{34}}$ untuk suatu bilangan asli a_1, a_2, \dots , dan a_{34} . Jumlahan semua bilangan idol adalah ...

a. 176714 b. 177310 c. 176118 d. 595 e. 596

19. Banyaknya pasangan terurut bilangan asli (v, w, x, y, z) yang memenuhi sistem pertidaksamaan

$$\begin{cases} x + y + z < 13, \\ v + w + x + y + z < 26 \end{cases}$$

adalah ...

a. 24387 b. 30130 c. 36125 d. 42317 e. 48774

20. Diberikan segitiga siku-siku sama kaki PQR dengan $\angle PQR = 90^\circ$. Misalkan A titik di dalam segitiga PQR dan B titik di luar segitiga PQR sehingga $PA < PB$, $\angle AQB = 45^\circ$, dan $AP \parallel BR$. Misalkan pula AB memotong PR di titik C . Jika $AC = 15$ dan $BC = 20$, maka nilai dari $AP + BR$ adalah ...

a. 45 b. 46 c. 47 d. 48 e. 49

21. Diberikan barisan (x_n) dengan $x_0 = \frac{5}{2}$ dan $x_n = x_{n-1}^2 - 2$ untuk setiap bilangan asli n . Diketahui $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{23} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$. Digit satuan dari $p + q$ adalah ...

a. 1 b. 3 c. 5 d. 7 e. 9

22. Misalkan $m = \underbrace{0291023 \dots 0291023}_{289 \text{ bilangan } 0291023}$ dan n adalah sisa bagi dari 10^{2023} oleh m . Jumlahan semua digit dari n adalah ...

a. 4624 b. 4625 c. 4913 d. 4914 e. 5202

23. Orlando memiliki seekor kucing gemoy yang sering berpindah-pindah di antara ruang tamu dan dapur. Ketika berada di suatu ruang, kucing gemoy berpeluang $\frac{1}{3}$ untuk tetap berada di ruang tersebut dan berpeluang $\frac{2}{3}$ untuk berpindah ke ruang lainnya. Misalkan $f(n)$

adalah peluang kucing gemoy berada di dapur tepat n menit setelah ia berada di ruang tamu. Sebagai contoh, $f(1) = \frac{2}{3}$ dan $f(2) = \frac{4}{9}$. Nilai dari

$$[f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)] + [f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(100)]$$

adalah ...

- a. 3 b. 4 c. 100 d. 101 e. 102

24. Diberikan segitiga ABC serta D , E , dan F berturut-turut titik pada BC , AC , dan AB . Diketahui AD , BE , dan CF berpotongan di titik P sehingga $\frac{AP}{DP} + \frac{BP}{EP} + \frac{CP}{FP} = \frac{20}{23}$.

Diketahui pula $\frac{DP}{AP} \cdot \frac{EP}{BP} \cdot \frac{FP}{CP} = \frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q dengan FPB(p, q) = 1.

Nilai dari $p + q$ adalah ...

- a. 26 b. 43 c. 89 d. 417 e. 418

25. Seorang dosen memberikan nilai IPS secara acak berupa suatu bilangan riil di antara 0 dan 4 (tidak termasuk 0 dan 4) kepada 3 mahasiswanya. Diketahui peluang selisih nilai IPS

tiap 2 mahasiswa kurang dari $\sqrt{2}$ adalah $\frac{p - q\sqrt{r}}{s}$ untuk suatu bilangan asli p, q, r , dan s dengan FPB(p, q, s) = 1 dan r tidak habis dibagi bilangan kuadrat sempurna apapun selain 1. Nilai dari $p + q + r + s$ adalah ...

- a. 41 b. 43 c. 46 d. 50 e. 55

Isian Singkat

1. (Soal diralat) Misalkan bilangan riil x_1, x_2, \dots , dan x_{2023} memenuhi

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{2023}^2 = x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{2023}^3 = x_1^4 + x_2^4 + \dots + x_{2023}^4.$$

Nilai maksimum dari

$$x_1 - x_2^2 + x_3^3 - x_4^4 + \dots - x_{2022}^{2022} + x_{2023}^{2023}$$

adalah ...

2. Jam dinding kontinu adalah jam dinding pada umumnya dimana ketiga jarumnya bergerak secara halus dan kontinu. Suatu ketika, jarum-jarum pada suatu jam dinding kontinu memenuhi

- jarum jam, jarum menit, dan jarum detik berada secara berurutan searah jarum jam;
- jarum jam dan jarum menit membentuk sudut 20° serta jarum menit dan jarum detik membentuk sudut 23° ; dan
- jarum jam berada pada juring yang diapit tanda bilangan 11 dan tanda bilangan 12.

Diketahui butuh waktu $\frac{p}{q} < 360$ detik sejak kejadian tersebut agar waktu mencapai pukul 12 tepat untuk suatu bilangan asli p, q dengan FPB(p, q) = 1. Nilai dari $p + q$ adalah ...

3. Suatu segitiga sama sisi dipartisi menjadi sejumlah 529 segitiga kecil sama sisi yang kongruen. Banyaknya segitiga sama sisi yang dapat dibentuk dengan menggabungkan 1 atau lebih segitiga kecil yang saling berdekatan adalah ...

4. Misalkan m dan n berturut-turut merupakan nilai minimum dan nilai maksimum dari $p + q$ dengan p dan q bilangan prima sehingga $p^q + q^p + 11$ habis dibagi pq . Nilai dari $m + n$ adalah ...

5. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = BC$. Misalkan L adalah lingkaran luarnya dan l adalah garis yang menyinggung L di B . Misalkan pula D titik pada busur BC dari lingkaran L yang tidak memuat A . Garis AD dan CD memotong l berturut-turut di titik E dan F . Garis AD juga memotong BC di titik G . Diketahui $BF = EF$ dan $\frac{BG}{CG} = \frac{34}{23}$.
Jika $\frac{AG}{DG} = \frac{x}{y}$ untuk suatu bilangan asli x dan y , maka nilai minimum dari xy adalah ...