

# Soal Babak Semifinal LMNas 34 UGM Tingkat SMP

## Bagian I

1. Misalkan  $N$  adalah suatu bilangan asli dengan

$$N = \underbrace{22 \dots 22}_{34 \text{ digit}} \times \underbrace{33 \dots 33}_{34 \text{ digit}}.$$

Jumlahan dari digit-digit  $3N$  adalah ...

2. Misalkan  $(x, y, z)$  adalah tripel bilangan asli yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1000, \\ 2x + 3y + 4z = 1750. \end{cases}$$

Nilai minimum dari  $3x + 2y - 3z$  adalah ...

3. Banyak cara menyusun 6 huruf dari huruf 'a', 'i', dan 'h' (boleh tidak menggunakan huruf tertentu) dengan huruf 'h' ada sebanyak genap buah (sebanyak 0 termasuk genap) adalah ...
4. Diberikan segitiga  $ABC$  yang mempunyai luas 36 satuan luas dan panjang masing-masing garis beratnya adalah  $m_a, m_b$ , dan  $m_c$ . Kemudian, dibentuk segitiga baru yang panjang sisi-sisinya adalah  $m_a, m_b$ , dan  $m_c$ . Luas segitiga baru tersebut adalah ...
5. Diketahui luas daerah yang dibatasi oleh kurva  $y = \sqrt{-(x-12)(x-34)}$  dan sumbu- $X$  dapat dinyatakan sebagai  $\frac{p}{q}\pi$  untuk suatu bilangan asli  $p$  dan  $q$  yang relatif prima. Nilai dari  $p + q$  adalah ...
6. Diberikan bilangan asli  $n$  dengan sifat akar kubiknya bisa diperoleh dengan menghilangkan tiga digit terakhir dari  $n$ . Jumlah semua nilai  $n$  yang mungkin adalah ...
7. Banyak cara memilih dua himpunan bagian berbeda dari himpunan  $\{A, B, C, D, E\}$  yang irisannya memuat tepat satu elemen adalah ...
8. Diberikan segitiga sama sisi  $ABC$  dan titik  $P$  merupakan titik di dalam segitiga  $ABC$  sedemikian sehingga  $AP = 12, BP = 5$ , dan  $CP = 13$ . Luas segitiga  $ABC$  dapat dinyatakan dalam  $a + \frac{b}{c}\sqrt{d}$  untuk suatu bilangan asli  $a, b, c$ , dan  $d$  dengan  $b$  dan  $c$  relatif prima dan  $d$  bebas kuadrat. Nilai dari  $a + b + c + d$  adalah ...

## Bagian II

9. Diberikan fungsi  $f$  yang memetakan bilangan riil yang lebih dari 1 ke bilangan riil non-negatif dengan definisi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 3| & , 1 < x \leq 2, \\ 2f\left(\frac{x}{2}\right) & , x > 2. \end{cases}$$

Nilai terkecil  $x$  yang memenuhi  $f(x) = f(2023)$  adalah ...

10. Diketahui  $a$  adalah bilangan bulat non-positif terbesar yang mengakibatkan  $43a + 460$  merupakan kelipatan 2023. Nilai dari  $-a$  adalah ...
11. Banyak cara memilih 4 bilangan berbeda dari himpunan  $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$  dengan syarat keempat bilangan tersebut membentuk barisan geometri dengan rasio bilangan bulat positif adalah ...
12. Diberikan segitiga siku-siku  $ABC$  siku - siku di  $C$  dengan  $AB = 10$  dan  $AC = 8$ . Titik  $P$  berada pada segmen  $BC$  dan titik  $Q$  berada pada segmen  $AC$  dengan sifat  $CP = CQ = 2$ . Garis  $AP$  dan  $BQ$  berpotongan di titik  $R$ . Garis  $CR$  berpotongan dengan garis  $PQ$  dan  $AB$  berturut - turut di  $T$  dan  $S$ . Diketahui  $TS = \frac{p}{q}\sqrt{r}$  dengan  $p$  dan  $q$  bilangan asli yang relatif prima dan  $r$  bilangan asli bebas kuadrat. Nilai dari  $p + q + r$  adalah ...
13. Diberikan fungsi  $f$  dengan definisi

$$f(x) = \sqrt{2023 + 12\sqrt{2023 - 12x}}$$

untuk setiap bilangan riil  $x$  yang memenuhi. Diketahui bahwa persamaan  $x = f(f(f(x)))$  memiliki solusi  $x = \sqrt{p} + q$  untuk suatu bilangan asli  $p$  dan bilangan asli bebas kuadrat  $q$ . Nilai dari  $p + q$  adalah ...

14. Banyak pasangan bilangan bulat positif  $(a, b)$  yang memenuhi

$$4b + 7 \leq a^2 - b^2 \leq 5b + 16$$

adalah ...

15. Diketahui bahwa sebanyak 2023 mahasiswa dapat dikelompokkan ke dalam 34 kelompok dengan ketentuan sebagai berikut

- \* setiap kelompok memuat  $x$  mahasiswa;
- \* setiap mahasiswa termuat di tepat  $y$  kelompok; dan
- \* setiap pasangan mahasiswa termuat di tepat  $z$  kelompok

untuk suatu bilangan asli  $x, y, z$ . Nilai minimum dari  $x$  adalah ...

16. Misalkan  $\Gamma$  adalah lingkaran satuan yang berpusat di titik asal. Diketahui bahwa peluang suatu segi-2023 yang berada di dalam  $\Gamma$  memuat titik asal dapat dinyatakan sebagai  $\frac{p}{q}\sqrt{r}$  dengan  $p$  dan  $q$  bilangan asli yang relatif prima dan  $r$  bilangan asli bebas kuadrat. Dua digit terakhir dari  $p + q + r$  adalah ...

## Bagian III

17. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan panjang jari-jari lingkaran dalam  $r$  dan lingkaran luar  $R$  dengan sifat  $R \cdot r = \frac{23}{7}$ . Diketahui luas dan keliling dari segitiga  $ABC$  berturut-turut  $\sqrt{42}$  dan 14. Jika  $\kappa$  merupakan panjang sisi terpanjang segitiga  $ABC$ , maka nilai dari  $\lfloor \kappa \rfloor$  adalah ...

18. Jika

$$\overline{p_{2023}p_{2022} \dots p_3p_2p_1} = 9 \cdot \overline{p_1p_2p_3 \dots p_{2022}p_{2023}}$$

untuk suatu bilangan bulat  $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_{2023} \leq 9$  dengan  $p_1 \neq 0$  dan  $p_{2023} \neq 0$ , maka selisih dari  $\overline{p_1p_2p_3p_4p_5p_6}$  dan  $\overline{p_{2018}p_{2019}p_{2020}p_{2021}p_{2022}p_{2023}}$  adalah ...

19. Misalkan 2023 titik berbeda ditempatkan pada keliling suatu lingkaran dan akan dicat dengan salah satu dari warna merah atau putih. Akan dibentuk sejumlah talibusur berbeda yang menghubungkan 2 titik yang berlainan warna sedemikian sehingga tidak ada 2 talibusur yang berpotongan didalam lingkaran tersebut. Banyak maksimum talibusur yang dapat dibentuk adalah ...

20. Misalkan

- $\Gamma$  adalah parabola dengan persamaan  $y = ax^2 - 23$  untuk suatu bilangan riil  $a > \frac{1}{23}$ .
- $\Gamma'$  adalah lingkaran yang berpusat di titik asal dan menyinggung  $\Gamma$  tepat di 2 titik.
- $\bar{\Gamma}$  adalah lingkaran yang menyinggung  $\Gamma$  dan  $\Gamma'$ , masing-masing tepat di 1 titik.
- $\Gamma^*$  adalah lingkaran terbesar yang berada didalam  $\Gamma$  dan menyinggung  $\Gamma$  tepat pada titik puncaknya.

Diketahui bahwa perbandingan antara jarak titik asal ke titik pusat  $\bar{\Gamma}$  dan jarak titik asal ke puncak  $\Gamma$  adalah  $\frac{9}{10}$ . Diketahui pula bahwa perbandingan antara jarak titik asal ke titik pusat  $\Gamma^*$  dan jarak titik asal ke puncak  $\Gamma$  dapat dinyatakan dengan  $\frac{p}{q}$  untuk suatu bilangan asli  $p$  dan  $q$  yang relatif prima. Nilai dari  $p + q$  adalah ...