

Soal Babak Semifinal LMNas 34 UGM Tingkat SMP

Bagian I

1. Misalkan N adalah suatu bilangan asli dengan

$$N = \underbrace{22 \dots 22}_{34 \text{ digit}} \times \underbrace{33 \dots 33}_{34 \text{ digit}}.$$

Jumlahan dari digit-digit $3N$ adalah ...

2. Misalkan (x, y, z) adalah tripel bilangan asli yang memenuhi sistem persamaan berikut:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1000, \\ 2x + 3y + 4z = 1750. \end{cases}$$

Nilai minimum dari $3x + 2y - 3z$ adalah ...

3. Banyak cara menyusun 6 huruf dari huruf 'a', 'i', dan 'h' (boleh tidak menggunakan huruf tertentu) dengan huruf 'h' ada sebanyak genap buah (sebanyak 0 termasuk genap) adalah ...
4. Diberikan segitiga ABC yang mempunyai luas 36 satuan luas dan panjang masing-masing garis beratnya adalah m_a, m_b , dan m_c . Kemudian, dibentuk segitiga baru yang panjang sisi-sisinya adalah m_a, m_b , dan m_c . Luas segitiga baru tersebut adalah ...
5. Diketahui luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = \sqrt{-(x-12)(x-34)}$ dan sumbu- X dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q}\pi$ untuk suatu bilangan asli p dan q yang relatif prima. Nilai dari $p + q$ adalah ...
6. Diberikan bilangan asli n dengan sifat akar kubiknya bisa diperoleh dengan menghilangkan tiga digit terakhir dari n . Jumlah semua nilai n yang mungkin adalah ...
7. Banyak cara memilih dua himpunan bagian berbeda dari himpunan $\{A, B, C, D, E\}$ yang irisannya memuat tepat satu elemen adalah ...
8. Diberikan segitiga sama sisi ABC dan titik P merupakan titik di dalam segitiga ABC sedemikian sehingga $AP = 12, BP = 5$, dan $CP = 13$. Luas segitiga ABC dapat dinyatakan dalam $a + \frac{b}{c}\sqrt{d}$ untuk suatu bilangan asli a, b, c , dan d dengan b dan c relatif prima dan d bebas kuadrat. Nilai dari $a + b + c + d$ adalah ...

Bagian II

9. Diberikan fungsi f yang memetakan bilangan riil yang lebih dari 1 ke bilangan riil non-negatif dengan definisi

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |2x - 3| & , 1 < x \leq 2, \\ 2f\left(\frac{x}{2}\right) & , x > 2. \end{cases}$$

Nilai terkecil x yang memenuhi $f(x) = f(2023)$ adalah ...

10. Diketahui a adalah bilangan bulat non-positif terbesar yang mengakibatkan $43a + 460$ merupakan kelipatan 2023. Nilai dari $-a$ adalah ...
11. Banyak cara memilih 4 bilangan berbeda dari himpunan $S = \{1, 2, 3, \dots, 1000\}$ dengan syarat keempat bilangan tersebut membentuk barisan geometri dengan rasio bilangan bulat positif adalah ...
12. Diberikan segitiga siku-siku ABC siku - siku di C dengan $AB = 10$ dan $AC = 8$. Titik P berada pada segmen BC dan titik Q berada pada segmen AC dengan sifat $CP = CQ = 2$. Garis AP dan BQ berpotongan di titik R . Garis CR berpotongan dengan garis PQ dan AB berturut - turut di T dan S . Diketahui $TS = \frac{p}{q}\sqrt{r}$ dengan p dan q bilangan asli yang relatif prima dan r bilangan asli bebas kuadrat. Nilai dari $p + q + r$ adalah ...
13. Diberikan fungsi f dengan definisi

$$f(x) = \sqrt{2023 + 12\sqrt{2023 - 12x}}$$

untuk setiap bilangan riil x yang memenuhi. Diketahui bahwa persamaan $x = f(f(f(x)))$ memiliki solusi $x = \sqrt{p} + q$ untuk suatu bilangan asli p dan bilangan asli bebas kuadrat q . Nilai dari $p + q$ adalah ...

14. Banyak pasangan bilangan bulat positif (a, b) yang memenuhi

$$4b + 7 \leq a^2 - b^2 \leq 5b + 16$$

adalah ...

15. Diketahui bahwa sebanyak 2023 mahasiswa dapat dikelompokkan ke dalam 34 kelompok dengan ketentuan sebagai berikut

- * setiap kelompok memuat x mahasiswa;
- * setiap mahasiswa termuat di tepat y kelompok; dan
- * setiap pasangan mahasiswa termuat di tepat z kelompok

untuk suatu bilangan asli x, y, z . Nilai minimum dari x adalah ...

16. Misalkan Γ adalah lingkaran satuan yang berpusat di titik asal. Diketahui bahwa peluang suatu segi-2023 yang berada di dalam Γ memuat titik asal dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q}\sqrt{r}$ dengan p dan q bilangan asli yang relatif prima dan r bilangan asli bebas kuadrat. Dua digit terakhir dari $p + q + r$ adalah ...

Bagian III

17. Diberikan segitiga ABC dengan panjang jari-jari lingkaran dalam r dan lingkaran luar R dengan sifat $R \cdot r = \frac{23}{7}$. Diketahui luas dan keliling dari segitiga ABC berturut-turut $\sqrt{42}$ dan 14. Jika κ merupakan panjang sisi terpanjang segitiga ABC , maka nilai dari $\lfloor \kappa \rfloor$ adalah ...

18. Jika

$$\overline{p_{2023}p_{2022} \dots p_3p_2p_1} = 9 \cdot \overline{p_1p_2p_3 \dots p_{2022}p_{2023}}$$

untuk suatu bilangan bulat $0 \leq p_1, p_2, \dots, p_{2023} \leq 9$ dengan $p_1 \neq 0$ dan $p_{2023} \neq 0$, maka selisih dari $\overline{p_1p_2p_3p_4p_5p_6}$ dan $\overline{p_{2018}p_{2019}p_{2020}p_{2021}p_{2022}p_{2023}}$ adalah ...

19. Misalkan 2023 titik berbeda ditempatkan pada keliling suatu lingkaran dan akan dicat dengan salah satu dari warna merah atau putih. Akan dibentuk sejumlah talibusur berbeda yang menghubungkan 2 titik yang berlainan warna sedemikian sehingga tidak ada 2 talibusur yang berpotongan didalam lingkaran tersebut. Banyak maksimum talibusur yang dapat dibentuk adalah ...

20. Misalkan

- Γ adalah parabola dengan persamaan $y = ax^2 - 23$ untuk suatu bilangan riil $a > \frac{1}{23}$.
- Γ' adalah lingkaran yang berpusat di titik asal dan menyinggung Γ tepat di 2 titik.
- $\bar{\Gamma}$ adalah lingkaran yang menyinggung Γ dan Γ' , masing-masing tepat di 1 titik.
- Γ^* adalah lingkaran terbesar yang berada didalam Γ dan menyinggung Γ tepat pada titik puncaknya.

Diketahui bahwa perbandingan antara jarak titik asal ke titik pusat $\bar{\Gamma}$ dan jarak titik asal ke puncak Γ adalah $\frac{9}{10}$. Diketahui pula bahwa perbandingan antara jarak titik asal ke titik pusat Γ^* dan jarak titik asal ke puncak Γ dapat dinyatakan dengan $\frac{p}{q}$ untuk suatu bilangan asli p dan q yang relatif prima. Nilai dari $p + q$ adalah ...