

Soal Babak Penyisihan LMNas 35 UGM Tingkat SMA

Pilihan Ganda

1. Diberikan polinom $P(x) = x^2 - 4x + 6$. Didefinisikan polinom Q dengan

$$Q(x) = P(P(x)) - x.$$

Jumlahan semua akar real dari Q adalah ...

- a. 4 b. 5 c. 6 d. 7 e. 8

2. Bilangan n adalah bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$\text{FPB}(n, 2024) \times \text{KPK}(n, 2024) = 99176.$$

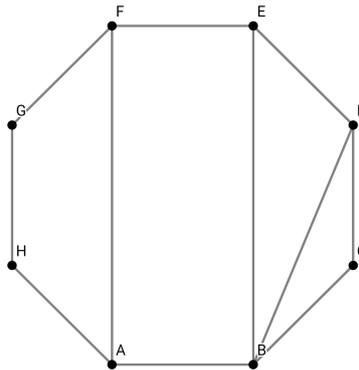
Nilai n terkecil yang memenuhi adalah ...

- a. 7 b. 14 c. 49 d. 84 e. 119

3. Banyak permutasi dari kata "LMNAS3516" adalah ...

- a. 3628800 b. 362880 c. 36288 d. 403200 e. 40320

4. Diberikan segidelapan beraturan berikut.



Jika perbandingan luas segitiga BCD dengan luas segiempat $ABEF$ dapat dinyatakan dengan $\frac{a - b\sqrt{2}}{c}$, di mana a, b dan c adalah bilangan bulat nonnegatif dengan $\text{FPB}(a, b)$, dan c relatif prima, maka nilai dari $3a + 5b + 7c$ adalah ...

- a. 16 b. 22 c. 29 d. 36 e. 39

5. Diberikan barisan geometri dengan suku-suku positif dan deret tak hingga dari barisan geometri tersebut adalah S , di mana $S \in \mathbb{R}$. Diketahui juga bahwa suku kedua dari barisan geometri tersebut bernilai 1. Nilai terkecil dari S adalah ...

- a. 4 b. 3 c. 2 d. 5 e. 6

6. Banyaknya triplet bilangan asli (a, b, c) yang memenuhi persamaan $abc - 2 = a + b + c$ adalah ...
- a. 11 b. 10 c. 9 d. 15 e. 16

7. Umar memiliki sebuah *string* sebagai berikut

“LOMBAMATEMATIKANASIONALUNIVERSITASGADJAHMADA20242024”

Umar akan menghapus beberapa huruf dari *string* tersebut sehingga *string* akhir yang akan terbentuk adalah “MATH24”. Banyak cara yang berbeda untuk membuang huruf-huruf yang ada sehingga terbentuk *string* “MATH24” adalah...

- a. 124 b. 144 c. 260 d. 1616 e. 2024
8. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 35$ dan titik D berada di lingkaran luar segitiga ABC dengan D berada di busur AC . Jika perpanjangan BA dan perpanjangan CD berpotongan di titik E dengan $EA = 16$ dan $ED = 24$, maka panjang segmen ED adalah...
- a. 31 b. 32 c. 33 d. 34 e. 35

9. Diketahui a dan b bilangan asli ganjil yang memenuhi

$$(1 + 3 + 5 + \dots + 35) + (1 + 3 + 5 + \dots + a) = (1 + 3 + 5 + \dots + b)$$

Nilai $a + b$ yang mungkin adalah...

- a. 80 b. 82 c. 96 d. 162 e. 322
10. Diberikan bilangan bulat n sedemikian sehingga

$$n + 2 \mid n^4 + 2024.$$

Maka banyaknya bilangan n yang memenuhi adalah ...

- a. 8 b. 16 c. 32 d. 48 e. 64
11. Diberikan 2024 bola dengan 46 jenis warna yang berbeda, dengan 44 bola untuk setiap warna. Jika n adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga saat 2024 bola tersebut diletakkan secara melingkar, dengan cara apa pun, akan selalu ada n bola bersebelahan yang memiliki setidaknya 35 warna yang berbeda, maka nilai dari n adalah ...
- a. 35 b. 1497 c. 1454 d. 1496 e. 2024

12. Diberikan kubus $ABCD.EFGH$. Misalkan titik P merupakan titik tengah ruas garis AC . Nilai dari $\sin \angle FPH$ adalah ...

- a. $\frac{1}{3}\sqrt{8}$ b. $\frac{1}{3}\sqrt{5}$ c. $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ d. $\frac{1}{3}$ e. $\frac{2}{3}$

13. Diberikan bilangan real positif x, y , dan z dengan $xyz = \frac{1}{12}$. Nilai minimum dari

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x^2y^2 + 36y^2z^2 + 9z^2x^2$$

dapat dinyatakan sebagai

$$3 \left(\sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4a}} \right)$$

dengan $a \in \mathbb{N}$. Nilai dari a^a adalah ...

- a. 1 b. 27 c. 256 d. 3125 e. 4

14. Sisa bagi dari pembagian $16^{1001} \times (100!)^{35}$ oleh 3535 adalah...
 a. 505 b. 595 c. 910 d. 2695 e. 3115
15. Jika n menyatakan banyaknya cara untuk mendistribusikan 22 bola berbeda ke dalam 4 kotak identik sedemikian sehingga tidak ada kotak yang kosong, maka digit terakhir dari n adalah ...
 a. 0 b. 1 c. 5 d. 6 e. 9
16. Diberikan segitiga ABC dengan $AB = 20$, $BC = 22$, dan $CA = 24$. Dimisalkan Γ adalah lingkaran luar segitiga ABC serta ℓ_A , ℓ_B , dan ℓ_C adalah garis-garis singgung lingkaran Γ berturut-turut di titik A , B , dan C . Dimisalkan juga X , Y , dan Z adalah titik-titik potong berturut-turut antara ℓ_B dengan ℓ_C , ℓ_A dengan ℓ_C , dan ℓ_A dengan ℓ_B . Jika

$$\frac{1}{AY} + \frac{1}{AZ} + \frac{1}{BX} + \frac{1}{BZ} + \frac{1}{CX} + \frac{1}{CY} = \frac{p}{q}$$

- untuk suatu $p, q \in \mathbb{N}$ dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$, maka nilai dari $p + q$ adalah ...
 a. 81 b. 161 c. 337 d. 601 e. 1129
17. Diberikan barisan (x_n) dengan $x_1 = \frac{16}{35}$ dan $x_{n+1} = \frac{-x_n^2}{1 + x_n + x_n^2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{p}{q}$ untuk suatu $p, q \in \mathbb{N}$ dengan $\text{FPB}(p, q) = 1$, maka nilai dari $p + q$ adalah ...
 a. 51 b. 67 c. 86 d. 1634 e. 1785
18. Diketahui bilangan asli n yang memenuhi dua digit terakhir dari n^{101} dalam basis 7 adalah 02. Bilangan asli n terkecil yang memenuhi adalah ...
Contoh: 3^5 dalam basis 7 adalah 465, sehingga dua digit terakhirnya dalam basis 7 adalah 65.
 a. 4 b. 11 c. 18 d. 25 e. 32
19. Ferrari melakukan pelemparan koin seimbang sebanyak tak berhingga kali dan mencatatnya dalam kertas sihir untuk menghitung nilai X . Misalkan $Y_n \in \{0, 1\}$ merepresentasikan hasil pelemparan ke- n dengan

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{jika hasil pelemparan adalah angka;} \\ 1, & \text{jika hasil pelemparan adalah gambar.} \end{cases}$$

Dari kertas sihir tersebut, nilai X adalah

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{2^n} = \frac{Y_1}{2} + \frac{Y_2}{2^2} + \frac{Y_3}{2^3} + \dots$$

Peluang nilai X berada di interval $\left[\frac{69}{2^{10}}, \frac{420}{2^{10}}\right]$ adalah ...

- a. $\frac{702}{729}$ b. $\frac{351}{729}$ c. $\frac{673}{1024}$ d. $\frac{351}{512}$ e. $\frac{351}{1024}$
20. Diberikan dua buah segilima siklis $A_1A_2A_3A_4A_5$ dan $B_1B_2B_3B_4B_5$, dimana A_i adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga $B_{i-1}B_iB_{i+1}$ (dengan $B_0 = B_5$ dan $B_6 = B_1$). Maka maksimal banyaknya garis yang dapat diambil dari garis-garis $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$, dan A_5B_5 sedemikian sehingga garis-garis yang dipilih berpotongan di satu titik adalah...
 a. 1 b. 2 c. 3 d. 4 e. 5

21. Diberikan

$$S = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(u+g+m+1)2024^{u+g+m+1}}.$$

Nilai S dapat dinyatakan sebagai $\frac{p}{q}$, dengan p dan q adalah bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari $p+q$ adalah ...

- a. 8199105 b. 4092530 c. 8197201 d. 8189105 e. 8187201

22. Banyaknya pasangan bilangan bulat (n, m) sedemikian sehingga $1 \leq n < m \leq 100$, $n|m^4 - 1$, dan $m|n^4 - 1$ adalah ...

- a. 99 b. 101 c. 198 d. 203 e. 205

23. Buma dan Kamna memainkan suatu permainan sebagai berikut:

Terdapat 10 jenis kelereng yang memiliki warna berbeda-beda. Dengan masing-masing jenis kelereng memiliki jumlah yang sangat banyak.

- Pada babak pertama, Buma memilih 1 jenis kelereng dan Kamna memilih 9 jenis kelereng.
- Pada babak kedua, Buma memilih 2 jenis kelereng dan Kamna memilih 8 jenis kelereng.
- Permainan diteruskan sampai babak kesembilan, dengan Buma memilih 9 jenis kelereng dan Kamna memilih 1 jenis kelereng.

Jika mereka dapat memilih jenis kelereng yang sama, jumlah banyak cara berbeda mereka memilih jenis kelereng di setiap babak adalah ...

- a. 97238 b. 97240 c. 161616 d. 184754 e. 184756

24. Diberikan segiempat $ABCD$ dengan $\angle ABC = 90^\circ$ dan panjang $AB = 24$, $BC = 7$, $CD = 15$, dan $DA = 20$. Sebuah titik P dipilih dari diagonal BD sehingga $\angle APB = 2\angle CPD$. Lalu titik X dan Y dipilih dari segmen AP sehingga $\angle AXB = 2\angle ADB$, $\angle AYD = 2\angle ABD$. Panjang XY adalah ...

- a. 6 b. 7 c. 8 d. 10 e. 12

25. Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, diketahui bahwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Misalkan $S = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{FPB}(m, n) = 1\}$. Jika

$$\sum_{(m,n) \in S} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{a}{b} \pi^c$$

untuk suatu $a, b \in \mathbb{N}$ dan $c \in \mathbb{Z}$ dengan $\text{FPB}(a, b) = 1$, maka nilai dari $a+b+c$ adalah ...

- a. 7 b. 11 c. 65 d. 125 e. 287

Isian Singkat

1. Diberikan a, b, c adalah bilangan real yang memenuhi persamaan

$$3a^2 + 2b^2 + c^2 + 4ab + 2ac + 2bc = 2(6a + 5b + 3c - 7).$$

Nilai dari $a^3 + 2a^2b + a^2c + ab^2 + abc + a + b + c$ adalah ...

2. Banyak bilangan asli n dengan $35 \leq n \leq 3516$ di mana sisa bagi $n^4 - 9$ oleh 15 merupakan 7 adalah ...
3. Diberikan segitiga ABC dengan $AC = 17$. Titik D berada di AC dengan sifat $AB = CD$. Titik E dan F berturut-turut merupakan titik tengah dari AD dan BC . Garis AB memotong EF di titik P dan $AP = 7$. Jika panjang $CE = x$, maka nilai dari $x + 6$ adalah ...

4. Nilai dari

$$\csc^2(36^\circ) + \csc^2(72^\circ) + \csc^2(108^\circ) + \csc^2(144^\circ)$$

adalah ...

5. Diberikan sebuah tabel berukuran 24×24 dimana setiap selnya akan diisi oleh salah satu bilangan di antara 1 atau -1 . Jika n menyatakan banyaknya cara untuk mengisi tabel tersebut sedemikian sehingga jumlah semua bilangan pada setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah kelipatan 4, maka 2 digit terakhir dari n adalah ...