

# Soal Babak Penyisihan LMNas 35 UGM Tingkat SMA

## Pilihan Ganda

1. Diberikan polinom  $P(x) = x^2 - 4x + 6$ . Didefinisikan polinom  $Q$  dengan

$$Q(x) = P(P(x)) - x.$$

Jumlahan semua akar real dari  $Q$  adalah ...

- a. 4                      b. 5                      c. 6                      d. 7                      e. 8

2. Bilangan  $n$  adalah bilangan asli yang memenuhi persamaan

$$\text{FPB}(n, 2024) \times \text{KPK}(n, 2024) = 99176.$$

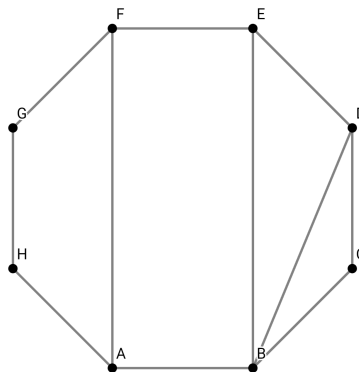
Nilai  $n$  terkecil yang memenuhi adalah ...

- a. 7                      b. 14                      c. 49                      d. 84                      e. 119

3. Banyak permutasi dari kata "LMNAS3516" adalah ...

- a. 3628800              b. 362880              c. 36288              d. 403200              e. 40320

4. Diberikan segidelapan beraturan berikut.



Jika perbandingan luas segitiga  $BCD$  dengan luas segiempat  $ABEF$  dapat dinyatakan dengan  $\frac{a - b\sqrt{2}}{c}$ , di mana  $a, b$  dan  $c$  adalah bilangan bulat nonnegatif dengan  $\text{FPB}(a, b)$ , dan  $c$  relatif prima, maka nilai dari  $3a + 5b + 7c$  adalah ...

- a. 16                      b. 22                      c. 29                      d. 36                      e. 39

5. Diberikan barisan geometri dengan suku-suku positif dan deret tak hingga dari barisan geometri tersebut adalah  $S$ , di mana  $S \in \mathbb{R}$ . Diketahui juga bahwa suku kedua dari barisan geometri tersebut bernilai 1. Nilai terkecil dari  $S$  adalah ...

- a. 4                      b. 3                      c. 2                      d. 5                      e. 6

6. Banyaknya triplet bilangan asli  $(a, b, c)$  yang memenuhi persamaan  $abc - 2 = a + b + c$  adalah ...
- a. 11                      b. 10                      c. 9                      d. 15                      e. 16

7. Umar memiliki sebuah *string* sebagai berikut

“LOMBAMATEMATIKANASIONALUNIVERSITASGADJAHMADA20242024”

Umar akan menghapus beberapa huruf dari *string* tersebut sehingga *string* akhir yang akan terbentuk adalah “MATH24”. Banyak cara yang berbeda untuk membuang huruf-huruf yang ada sehingga terbentuk *string* “MATH24” adalah...

- a. 124                      b. 144                      c. 260                      d. 1616                      e. 2024
8. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan  $AB = 35$  dan titik  $D$  berada di lingkaran luar segitiga  $ABC$  dengan  $D$  berada di busur  $AC$ . Jika perpanjangan  $BA$  dan perpanjangan  $CD$  berpotongan di titik  $E$  dengan  $EA = 16$  dan  $ED = 24$ , maka panjang segmen  $ED$  adalah...
- a. 31                      b. 32                      c. 33                      d. 34                      e. 35

9. Diketahui  $a$  dan  $b$  bilangan asli ganjil yang memenuhi

$$(1 + 3 + 5 + \dots + 35) + (1 + 3 + 5 + \dots + a) = (1 + 3 + 5 + \dots + b)$$

Nilai  $a + b$  yang mungkin adalah...

- a. 80                      b. 82                      c. 96                      d. 162                      e. 322
10. Diberikan bilangan bulat  $n$  sedemikian sehingga

$$n + 2 \mid n^4 + 2024.$$

Maka banyaknya bilangan  $n$  yang memenuhi adalah ...

- a. 8                      b. 16                      c. 32                      d. 48                      e. 64
11. Diberikan 2024 bola dengan 46 jenis warna yang berbeda, dengan 44 bola untuk setiap warna. Jika  $n$  adalah bilangan asli terkecil sedemikian sehingga saat 2024 bola tersebut diletakkan secara melingkar, dengan cara apa pun, akan selalu ada  $n$  bola bersebelahan yang memiliki setidaknya 35 warna yang berbeda, maka nilai dari  $n$  adalah ...
- a. 35                      b. 1497                      c. 1454                      d. 1496                      e. 2024

12. Diberikan kubus  $ABCD.EFGH$ . Misalkan titik  $P$  merupakan titik tengah ruas garis  $AC$ . Nilai dari  $\sin \angle FPH$  adalah ...

- a.  $\frac{1}{3}\sqrt{8}$                       b.  $\frac{1}{3}\sqrt{5}$                       c.  $\frac{1}{2}\sqrt{2}$                       d.  $\frac{1}{3}$                       e.  $\frac{2}{3}$

13. Diberikan bilangan real positif  $x, y$ , dan  $z$  dengan  $xyz = \frac{1}{12}$ . Nilai minimum dari

$$x^2 + 4y^2 + 9z^2 + 4x^2y^2 + 36y^2z^2 + 9z^2x^2$$

dapat dinyatakan sebagai

$$3 \left( \sqrt[3]{\frac{1}{a}} + \sqrt[3]{\frac{1}{4a}} \right)$$

dengan  $a \in \mathbb{N}$ . Nilai dari  $a^a$  adalah ...

- a. 1                      b. 27                      c. 256                      d. 3125                      e. 4

14. Sisa bagi dari pembagian  $16^{1001} \times (100!)^{35}$  oleh 3535 adalah...  
 a. 505                      b. 595                      c. 910                      d. 2695                      e. 3115
15. Jika  $n$  menyatakan banyaknya cara untuk mendistribusikan 22 bola berbeda ke dalam 4 kotak identik sedemikian sehingga tidak ada kotak yang kosong, maka digit terakhir dari  $n$  adalah ...  
 a. 0                      b. 1                      c. 5                      d. 6                      e. 9
16. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan  $AB = 20$ ,  $BC = 22$ , dan  $CA = 24$ . Dimisalkan  $\Gamma$  adalah lingkaran luar segitiga  $ABC$  serta  $\ell_A$ ,  $\ell_B$ , dan  $\ell_C$  adalah garis-garis singgung lingkaran  $\Gamma$  berturut-turut di titik  $A$ ,  $B$ , dan  $C$ . Dimisalkan juga  $X$ ,  $Y$ , dan  $Z$  adalah titik-titik potong berturut-turut antara  $\ell_B$  dengan  $\ell_C$ ,  $\ell_A$  dengan  $\ell_C$ , dan  $\ell_A$  dengan  $\ell_B$ . Jika

$$\frac{1}{AY} + \frac{1}{AZ} + \frac{1}{BX} + \frac{1}{BZ} + \frac{1}{CX} + \frac{1}{CY} = \frac{p}{q}$$

- untuk suatu  $p, q \in \mathbb{N}$  dengan  $\text{FPB}(p, q) = 1$ , maka nilai dari  $p + q$  adalah ...  
 a. 81                      b. 161                      c. 337                      d. 601                      e. 1129
17. Diberikan barisan  $(x_n)$  dengan  $x_1 = \frac{16}{35}$  dan  $x_{n+1} = \frac{-x_n^2}{1 + x_n + x_n^2}$  untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$ . Jika  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \frac{p}{q}$  untuk suatu  $p, q \in \mathbb{N}$  dengan  $\text{FPB}(p, q) = 1$ , maka nilai dari  $p + q$  adalah ...  
 a. 51                      b. 67                      c. 86                      d. 1634                      e. 1785
18. Diketahui bilangan asli  $n$  yang memenuhi dua digit terakhir dari  $n^{101}$  dalam basis 7 adalah 02. Bilangan asli  $n$  terkecil yang memenuhi adalah ...  
**Contoh:**  $3^5$  dalam basis 7 adalah 465, sehingga dua digit terakhirnya dalam basis 7 adalah 65.  
 a. 4                      b. 11                      c. 18                      d. 25                      e. 32
19. Ferrari melakukan pelemparan koin seimbang sebanyak tak berhingga kali dan mencatatnya dalam kertas sihir untuk menghitung nilai  $X$ . Misalkan  $Y_n \in \{0, 1\}$  merepresentasikan hasil pelemparan ke- $n$  dengan

$$Y_n = \begin{cases} 0, & \text{jika hasil pelemparan adalah angka;} \\ 1, & \text{jika hasil pelemparan adalah gambar.} \end{cases}$$

Dari kertas sihir tersebut, nilai  $X$  adalah

$$X = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n}{2^n} = \frac{Y_1}{2} + \frac{Y_2}{2^2} + \frac{Y_3}{2^3} + \dots$$

Peluang nilai  $X$  berada di interval  $\left[\frac{69}{2^{10}}, \frac{420}{2^{10}}\right]$  adalah ...

- a.  $\frac{702}{729}$                       b.  $\frac{351}{729}$                       c.  $\frac{673}{1024}$                       d.  $\frac{351}{512}$                       e.  $\frac{351}{1024}$
20. Diberikan dua buah segilima siklis  $A_1A_2A_3A_4A_5$  dan  $B_1B_2B_3B_4B_5$ , dimana  $A_i$  adalah titik pusat lingkaran dalam segitiga  $B_{i-1}B_iB_{i+1}$  (dengan  $B_0 = B_5$  dan  $B_6 = B_1$ ). Maka maksimal banyaknya garis yang dapat diambil dari garis-garis  $A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, A_4B_4$ , dan  $A_5B_5$  sedemikian sehingga garis-garis yang dipilih berpotongan di satu titik adalah ...  
 a. 1                      b. 2                      c. 3                      d. 4                      e. 5

21. Diberikan

$$S = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{g=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(u+g+m+1)2024^{u+g+m+1}}.$$

Nilai  $S$  dapat dinyatakan sebagai  $\frac{p}{q}$ , dengan  $p$  dan  $q$  adalah bilangan asli yang relatif prima. Nilai dari  $p+q$  adalah ...

- a. 8199105      b. 4092530      c. 8197201      d. 8189105      e. 8187201

22. Banyaknya pasangan bilangan bulat  $(n, m)$  sedemikian sehingga  $1 \leq n < m \leq 100$ ,  $n|m^4 - 1$ , dan  $m|n^4 - 1$  adalah ...

- a. 99      b. 101      c. 198      d. 203      e. 205

23. Buma dan Kamna memainkan suatu permainan sebagai berikut:

Terdapat 10 jenis kelereng yang memiliki warna berbeda-beda. Dengan masing-masing jenis kelereng memiliki jumlah yang sangat banyak.

- Pada babak pertama, Buma memilih 1 jenis kelereng dan Kamna memilih 9 jenis kelereng.
- Pada babak kedua, Buma memilih 2 jenis kelereng dan Kamna memilih 8 jenis kelereng.
- Permainan diteruskan sampai babak kesembilan, dengan Buma memilih 9 jenis kelereng dan Kamna memilih 1 jenis kelereng.

Jika mereka dapat memilih jenis kelereng yang sama, jumlah banyak cara berbeda mereka memilih jenis kelereng di setiap babak adalah ...

- a. 97238      b. 97240      c. 161616      d. 184754      e. 184756

24. Diberikan segiempat  $ABCD$  dengan  $\angle ABC = 90^\circ$  dan panjang  $AB = 24$ ,  $BC = 7$ ,  $CD = 15$ , dan  $DA = 20$ . Sebuah titik  $P$  dipilih dari diagonal  $BD$  sehingga  $\angle APB = 2\angle CPD$ . Lalu titik  $X$  dan  $Y$  dipilih dari segmen  $AP$  sehingga  $\angle AXB = 2\angle ADB$ ,  $\angle AYD = 2\angle ABD$ . Panjang  $XY$  adalah ...

- a. 6      b. 7      c. 8      d. 10      e. 12

25. Untuk setiap  $x \in \mathbb{R}$ , diketahui bahwa

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)!} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2}\right).$$

Misalkan  $S = \{(m, n) \in \mathbb{N}^2 : \text{FPB}(m, n) = 1\}$ . Jika

$$\sum_{(m,n) \in S} \frac{1}{m^2 n^2} = \frac{a}{b} \pi^c$$

untuk suatu  $a, b \in \mathbb{N}$  dan  $c \in \mathbb{Z}$  dengan  $\text{FPB}(a, b) = 1$ , maka nilai dari  $a+b+c$  adalah ...

- a. 7      b. 11      c. 65      d. 125      e. 287

## Isian Singkat

1. Diberikan  $a, b, c$  adalah bilangan real yang memenuhi persamaan

$$3a^2 + 2b^2 + c^2 + 4ab + 2ac + 2bc = 2(6a + 5b + 3c - 7).$$

Nilai dari  $a^3 + 2a^2b + a^2c + ab^2 + abc + a + b + c$  adalah ...

2. Banyak bilangan asli  $n$  dengan  $35 \leq n \leq 3516$  di mana sisa bagi  $n^4 - 9$  oleh 15 merupakan 7 adalah ...
3. Diberikan segitiga  $ABC$  dengan  $AC = 17$ . Titik  $D$  berada di  $AC$  dengan sifat  $AB = CD$ . Titik  $E$  dan  $F$  berturut-turut merupakan titik tengah dari  $AD$  dan  $BC$ . Garis  $AB$  memotong  $EF$  di titik  $P$  dan  $AP = 7$ . Jika panjang  $CE = x$ , maka nilai dari  $x + 6$  adalah ...
4. Nilai dari

$$\csc^2(36^\circ) + \csc^2(72^\circ) + \csc^2(108^\circ) + \csc^2(144^\circ)$$

adalah ...

5. Diberikan sebuah tabel berukuran  $24 \times 24$  dimana setiap selnya akan diisi oleh salah satu bilangan di antara 1 atau  $-1$ . Jika  $n$  menyatakan banyaknya cara untuk mengisi tabel tersebut sedemikian sehingga jumlah semua bilangan pada setiap baris, kolom, dan diagonalnya adalah kelipatan 4, maka 2 digit terakhir dari  $n$  adalah ...